

الماهر

ف

دريشة

الرياضيات

للف الثاني الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

يطلب من : مكتبة النجاح - مؤسسة الكتب الذهبية / بالفجالة

الدعم الفني ☎ ٠٢/٢٣٩٥٠٠١٣ - ٠١١٣٩٥٠٠١٣

وللاقتراحات ☎ ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠١٠١٥٠٨٠٠٥ ص.ب: ١٢ الدواوين - القاهرة

أو على موقعنا

WWW.ELMAHER.org

الموضوع	صفحة	الموضوع	صفحة
● الجبر ●		● الهندسة ●	
مراجعة على ما سبق	٥	متوسطات الثلاث	١٨٤
الجذر التكعيبي للعدد النسبي	١٨	متوسط الثلاث القوائم	١٩٥
مجموعة الأعداد غير النسبية	٢٨	الثلاث المتساوي الساقين	٢١٠
مجموعة الأعداد الحقيقية	٤٢	عكس نظرية الثلاث المتساوي الساقين	٢٢٤
العمليات على الأعداد الحقيقية	٥٤	نتائج على نظريات الثلاث المتساوي الساقين	٢٣٨
العمليات على الجذور التربيعية	٦٤	التبعاين	٢٥٢
العمليات على الجذور التكعيبية	٧٦	المقارنة بين زوايا الثلاث	٢٦٠
تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية	٨٣	المقارنة بين أطوال الأضلاع	٢٧١
حل المعادلات والتباينات	٩٨	متباينة الثلاث	٢٨٣
الملاحة بين مستقيمين	١١٢		
ميل الخط المستقيم	١٢٤		
تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم	١٣٢		
● الإحصاء ●			
جمع البيانات وتنظيمها	١٤٤		
الجدول التكراري التجميع	١٥٠		
مقاييس النزعة المركزية	١٥٨		
الوسيط	١٦٥		
المتوسط	١٧٤		

الحمد لله الذي وفقني وأعانني ونار لي الطريق كي أستطيع أن أنجز هذا الكتاب بصورته هذه لأقدمه إلى أبنائي الطلاب وإلى زملائي أساتذة الرياضيات أمل أن يجدوا فيه العون على أداء رسالتهم بكل ثقة ونجاح. وأسأل الله العلي القدير أن يحوز هذا الكتاب على تقديركم وثقتكم التي اعتز بها. فقد روعى أن يتضمن الكتاب الاهتمامات المتنوعة للقاعدة العريضة من الطلاب والمعلمين وأولياء الأمور وذلك من خلال:

- عرض المادة بطريقة مبسطة وشيقة.
- أمثلة توضيحية لأهم ما يجب التعرف عليه والتي تشمل الأفكار المختلفة لجميع أجزاء المنهج.
- أمثلة للتدريب نصف محلوله ليتدرب الطالب على كيفية الحل.
- التمارين الوهيرة والمتدرجة التي تناسب كل المستويات مشتملة على أفكار كتاب الوزارة.
- وقد تم تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء.

أولاً، راجع معنا واختبر نفسك وهي ما نتفرد به لجعل الطالب في مراجعة مستمرة في صورة اختبار مع كل درس جديد.

ثانياً، ارجع عما يأتي وهي التمارين المتدرجة وهي مستويات ثلاثة مختلفة:

- مسائل المستوى الأول - وتعتبر أسئلة تمهيدية ومباشرة تفهم الدرس.
- مسائل المستوى الثاني - وهي مسائل الامتحانات وما في مستواها وهي في مستوى الطالب المتوسط وفوق المتوسط. مع أفكار مختلفة يجب أن يلم بها الطالب.
- أسئلة الطلاب المتفوقين وهي لتنمية التفكير والإبداع لدى الطلاب.
- امتحانات وفيرة ليتدرب الطلاب على حلها.

أسأل الله العون والتوفيق

المؤلف



الجذر التكعيبي للعدد النسبي

سبق أن تعلمنا أن حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه وحدة مكعبة
 أى أن حجم مكعب طول حرفه ٥ = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥
 والعكس إذا كان لدينا مكعب حجمه ٢٧ ونريد معرفة طول حرفه فكيف نوجده ؟
 بالطبع لايجاد ذلك فإننا نبحث عن عدد س بحيث س × س × س يساوى ٢٧
 ولايجاد هذا العدد نحلل ٢٧ إلى عوامله الأولية كما بالشكل
 أى أن $27 = 3 \times 3 \times 3$
 ∴ المكعب الذى حجمه ٢٧ يكون طول حرفه ٣
 نلاحظ أن " العدد الذى تضربه فى نفسه فى نفسه ليكون الناتج ٢٧ هو ٣ "
 ويمكن الاستغناء عن هذه الجملة بعبارة أخرى رياضية وهى " الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ هو ٣ "
 تكتب رياضياً $\sqrt[3]{27} = 3$ ومن ذلك يمكن تعريف الجذر التكعيبي لعدد نسي كما يلى :

تعريف

والجذر التكعيبي للعدد النسبي a هو العدد الذي مكعبه يساوي a ويرمز للجذر التكعيبي للعدد النسبي a بالرمز $\sqrt[3]{a}$

وعلى ذلك فإن $3 = \sqrt[3]{27}$ لأن $27 = 3^3$

$$\lambda = r(r-1) \quad r = \sqrt{\lambda + 1}$$

ملاحظات

- الجذر التكعيبي للعدد a يكون موجباً إذا كان a عدداً موجباً ويكون الجذر التكعيبي للعدد a سالباً إذا كان a عدداً سالباً أى أن الجذر التكعيبي لأي عدد يكون له نفس إشارة هذا العدد

• $\sqrt{-1} = -\sqrt{1}$ ، $\sqrt{1} = 1$ ، $\sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$.

$$r_- = \sqrt{r(r-)} \sqrt{r}, \quad \theta = \sqrt{r} \theta \sqrt{r} \quad \text{and} \quad t = \sqrt{r} t \sqrt{r} \quad \bullet$$



- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{1}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m \times n}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ لأن $1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{m \times n}$ ، فمثلاً $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2 \times 3}}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}$
 • العدد النسبي له جذر تكعيبي واحد وهو عدد نسبي أيضاً
 • لايجاد الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل :
 ① يمكن تحليل العدد إلى عوامله الأولية
 ② يمكن استخدام الآلة الحاسبة

أمثلة توضيحية

استخدم التحليل لايجاد قيمة ما يأتى مع التحقق من صحة الاجابة باستخدام الآلة الحاسبة :

$$\sqrt{\frac{10}{\lambda}} \sqrt{r} \quad (2)$$

$$\sqrt{0.217} = \sqrt{\quad} \quad (2)$$

$\sqrt{75} \text{ ①}$

مكة الحل

تحلل كل عدد إلى عوامله الأولية

$$\frac{120}{\Delta} = 10 \frac{\circ}{\Delta} \quad (3)$$

$$\frac{297}{1000} = 0,297 \quad (2)$$

⑨

Y	A	0	120
Y	E	0	70
Y	Y	0	0
	I		1

Y	{	Y	Y Y
		Y	Y A
		Y	Q E
X	{	Y	Y V
		Y	Q
		Y	Y
<hr/>			Y
Y			Y

Y	{	Y	75
		Y	Y Y
X		Y	16
Y	{	Y	^
		Y	£
		Y	Y
<hr/>			1
£			

$$\frac{\sigma}{Y} = \frac{170}{\lambda} \sqrt{r} = 10 \frac{\sigma}{\lambda} \sqrt{r} \therefore$$

$$\frac{217}{1000} \sqrt{V} = \sqrt{217 - V} \therefore$$

$$6 = 7 \times 7 = 7 \sqrt{7} \therefore$$

$$r_1 = \frac{r_2}{1.2} = \frac{1.2 \times r_2}{1.2} =$$

ويمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي :

shift $\sqrt[3]{}$ 6 4 = 4

وبتنفس الطريقة يمكن التأكد من كل النتائج



$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{9} \text{ س} - 3 = 21 \quad \therefore \frac{1}{9} \text{ س} = 21 + 3 = 24$$

$$\text{(بضرب الطرفين } \times 9 \text{)}$$

$$\therefore \frac{1}{9} \text{ س} \times 9 = 24 \times 9 \quad \therefore \text{س} = 216$$

$$\therefore \text{س} = 216$$

$$\therefore \{ 216 \} = \text{ح.م}$$

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في هـ :

$$\textcircled{1} \quad 8 = (3 + \text{س})^3 \quad \textcircled{2} \quad 12 = 10 - 3(1 - \text{س})$$

نحل الحل

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\textcircled{1} \quad 8 = (3 + \text{س})^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(3 + \text{س})^3}$$

$$\therefore 2 = 3 + \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = 2 - 3 = -1$$

$$\therefore \text{س} = -1$$

$$\therefore 10 + 12 = 3(1 - \text{س})$$

$$\textcircled{2} \quad 12 = 10 - 3(1 - \text{س})$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$\therefore 27 = (1 - \text{س})^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(1 - \text{س})^3}$$

$$\therefore 3 = 1 - \text{س}$$

$$\therefore 1 + 3 = \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = 4$$

$$\therefore \{ 4 \} = \text{ح.م}$$

أوجد طول حرف مكعب حجمه ٢١٦ سم^٣

نحل الحل

نفرض أن طول حرف المكعب = س

$$\therefore \text{حجم المكعب} = \text{س}^3$$

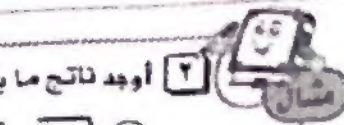
$$\therefore \text{س}^3 = 216$$

$$\therefore \text{س} = \sqrt[3]{216}$$

$$\therefore \text{س} = 6$$

\therefore طول حرف المكعب = ٦

وسوف ندرس بالتفصيل المكعب والكرة في درس تطبيقات على الجذور



أوجد ناتج ما يأتي :

$$\textcircled{3} \quad \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt[3]{8 - \sqrt[3]{9}}$$

$$\textcircled{1} \quad \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{25}$$

نحل الحل

$$\textcircled{1} \quad 2 = 3 - 5 = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{25}$$

$$\textcircled{2} \quad 1 = 2 - 3 = \sqrt[3]{8 - \sqrt[3]{9}}$$

$$\textcircled{3} \quad 2 = \frac{8}{4} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{4}}$$

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في و :

$$\textcircled{2} \quad 6 = 7 + 3 \text{ س}$$

$$\textcircled{1} \quad 64 = 3 \text{ س}$$

نحل الحل

$$\therefore \{ 4 \} = \text{ح.م}$$

$$\therefore 4 = \sqrt[3]{64}$$

$$\textcircled{1} \quad 64 = 3 \text{ س}$$

$$\therefore 7 - 6 = 3 \text{ س}$$

$$\textcircled{2} \quad 6 = 7 + 3 \text{ س}$$

$$\therefore \{ -1 \} = \text{ح.م}$$

$$\therefore 1 = \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{9}}$$

$$\therefore 1 = 3 \text{ س}$$

أوجد مجموعة الحل في هـ للمعادلات الآتية :

$$\textcircled{2} \quad 21 = 4 - 3 \text{ س}$$

$$\textcircled{1} \quad 57 = 3 + 2 \text{ س}$$

ملاحظة

لحل المعادلة لا بد أن نجعل س بمفردها في الطرف الأيمن وذلك باستخدام المعكوس الجمعي ثم المعكوس الضربي

$$\therefore 3 - 57 = 2 \text{ س}$$

$$\textcircled{1} \quad 57 = 3 + 2 \text{ س}$$

$$\therefore 27 = \frac{54}{2} = 2 \text{ س}$$

$$\therefore 54 = 2 \text{ س}$$

$$\therefore \{ 3 \} = \text{ح.م}$$

$$\therefore 3 = 2 \text{ س}$$

$$\therefore \sqrt[3]{27} = 2 \text{ س}$$



تدريب (٣)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة 2 من $3 - 6 = 4A$ في 5 :

وكم الحل

$$2 \text{ من } 3 - 6 = 4A \quad 2 \text{ من } 3 - 6 = 4A$$

$$(بالقوة على)$$

$$2 \text{ من } 3 - 6 = 4A \quad 2 \text{ من } 3 - 6 = 4A$$

$$\{ \dots \} = 2 \text{ من } 3 - 6 = 4A$$

تدريب (٤)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة $2V = 3(2 + \text{س})$ في 5 :

وكم الحل

$$2V = 3(2 + \text{س}) \quad 2V = 3(2 + \text{س})$$

$$2V = 3(2 + \text{س}) \quad 2V = 3(2 + \text{س})$$

$$\{ \dots \} = 2 \text{ من } 3 - 6 = 4A$$

تدريب (٥)

أكمل ما يأتي:

$$\sqrt{27} = \sqrt{100} \quad \sqrt{27} = \sqrt{100}$$

$$5 = \sqrt{27} + 25 \quad 5 = \sqrt{27} + 25$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{100} \quad \sqrt{27} = \sqrt{100}$$



أوجد طول قطر الكرة التي حجمها 113.4 π ($3.14 = \pi$)

وكم الحل

$$2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad 2 \text{ حجم الكرة } = \frac{4}{3} \pi r^3$$



امثلة للتدريب

تدريب (١)

أكمل ما يأتي:

$$\sqrt{27} = \sqrt{100} \quad \sqrt{27} = \sqrt{100}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{100} \quad \sqrt{27} = \sqrt{100}$$



تدريب (٢)

أكمل ما يأتي:

$$\sqrt{27} = \sqrt{100} \quad \sqrt{27} = \sqrt{100}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{100} \quad \sqrt{27} = \sqrt{100}$$





١٧) إذا كانت $\sqrt[3]{64} = 4$ فإن $\sqrt[3]{64} = \dots\dots\dots$

١٨) إذا كانت $\sqrt[3]{27} = 3$ فإن $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$

١٩) إذا كان $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9}$ فإن $\sqrt[3]{9} = \dots\dots\dots$

٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٤ - ٣ - ٣]

٢) $\sqrt[3]{0.008} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٠.٢ - ٠.٢ - ٢]

٣) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \dots\dots\dots$ [$\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$]

٤) $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢ - ٢ - ٢]

٥) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \dots\dots\dots$ [$\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$ - $\frac{2}{3}$]

٦) $\sqrt[3]{125} = \dots\dots\dots$ [٥ - ٥ - ٥ - ٥]

٧) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٣ - ٣ - ٣]

٨) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)} = \dots\dots\dots$ [$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$]

٩) $\sqrt[3]{(8-)} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢ - ٢ - ٢]

١٠) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{25} = \dots\dots\dots$ [٥ - ٥ - ٥ - ٥]

١١) $\sqrt[3]{0.008} \times \sqrt[3]{1000} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢ - ٢ - ٢]

١٢) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}$ [٣ - ٣ - ٣ - ٣]

١٣) $\sqrt[3]{(3-)} + \sqrt[3]{(3-)} = \dots\dots\dots$ [٦ - ٦ - ٦ - ٦]



تعاريف (٢) على الجذر التكعيبي للعدد النسبي

أولاً: راجع معنا واختر نفسك



عزيزي الطالب :

في هذا المكان من كل تعريف ستجد :
اسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختبار تراكمي على ما سبق دراسته
تجيبه في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر
ما درست باستمرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة
مما يجعلك في تواصل مع ما درست وأيضاً يعودك على الاختبارات
ويزيل رهبتها في نفسك وهذه الميزة يقدمها لك كتابنا الماهر فقط

ثانياً: أجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

١) اكمل ما يأتي :

١) $\sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢ - ٢ - ٢]

٢) $\sqrt[3]{1} = \dots\dots\dots$ [١ - ١ - ١ - ١]

٣) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٣ - ٣ - ٣]

٤) $\sqrt[3]{64} = \dots\dots\dots$ [٤ - ٤ - ٤ - ٤]

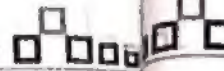
٥) $\sqrt[3]{0.008} = \dots\dots\dots$ [٠.٢ - ٠.٢ - ٠.٢ - ٠.٢]

٦) $\sqrt[3]{125} = \dots\dots\dots$ [٥ - ٥ - ٥ - ٥]

٧) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ [٣ - ٣ - ٣ - ٣]

٨) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)} = \dots\dots\dots$ [$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$]

٩) $\sqrt[3]{(8-)} = \dots\dots\dots$ [٢ - ٢ - ٢ - ٢]



٥ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في هـ :

- ① $5 = \sqrt{x}$ (١٢٥) ② $\frac{1}{x} - \sqrt{x} = 0$ (١٢٥)
 ③ $4\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ (٨٠) ④ $\sqrt{0.001x} = \sqrt{x}$ (١٠٠٠)
 ⑤ $27 = (1+x)^3$ (١٠) ⑥ $125 = (2-x)^3$ (٧)
 ⑦ $8 = (1+3x)^3$ (١٠) ⑧ $8 = (1-x)^3$ (١٠)
 ⑨ $54 = 10 - (1-x)^3$ (١٠) ⑩ $18 = 10 + (2-x)^3$ (١٠)

- ٦ ① أوجد طول حرف مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣ (٥)
 ② أوجد طول حرف مكعب حجمه $3\frac{3}{8}$ سم^٣ (٢)
 ③ إذا كان مربع عدد موجب يساوي ٩ فأوجد مكعب هذا العدد (٣)
 ④ أوجد المساحة الجانبية لمكعب حجمه ٢١٦ سم^٣ (٣٦)
 ⑤ (المساحة الجانبية = $4\sqrt{x}$ حيث x طول حرفه) (٣٦)
 ⑥ أوجد طول نصف قطر الكرة التي حجمها ٤٨٥١ سم^٣ (١٠)
 ⑦ كرة حجمها $\frac{1372}{81}\pi$ وحدة مكعبة أوجد طول قطرها (حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$) (٣)



مسائل المتفوقين

- ٧ أوجد في هـ مجموعة حل المعادلة $6 = \frac{x}{4} + \frac{x}{2}$ (٢)
 ٨ أوجد في هـ مجموعة حل المعادلة $1 = \sqrt{x-3}$ (١١)
 ٩ أوجد في هـ مجموعة حل المعادلة $27 = (1-x)^3$ (٢٤)
 ١٠ إنشاء مكعب الشكل سعته لتر واحد احسب طول حرفه (٢٧)

- ⑪ $\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 2, 2 \right] \dots\dots\dots = \sqrt{25} + 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ (١٤)
 ⑫ $\left[\frac{11}{4}, 1, 1, 1 \right] \dots\dots\dots = \sqrt{125} + \sqrt{12\frac{1}{4}} + \sqrt{27} - \sqrt{2}$ (١٥)
 ⑬ $\left[\frac{9}{4}, 9, 9, 9 \right] \dots\dots\dots = \sqrt{27} + \sqrt{27} + \sqrt{27}$ (١٦)



مسائل المستوى الثاني

٣ أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

- ① $\sqrt{64}$ ② $\sqrt{216}$ ③ $\sqrt{729}$
 ④ $\sqrt{512}$ ⑤ $\sqrt{0.064}$ ⑥ $\sqrt{1,331}$
 ⑦ $\sqrt{\frac{64}{125}}$ ⑧ $\sqrt{\frac{27}{343}}$ ⑨ $\sqrt{\frac{512}{8000}}$
 ⑩ $\sqrt{3\frac{3}{8}}$ ⑪ $\sqrt{8} + \sqrt{4}$ ⑫ $\sqrt{\frac{216}{125}} + \sqrt{\frac{9}{25}}$

٤ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في هـ :

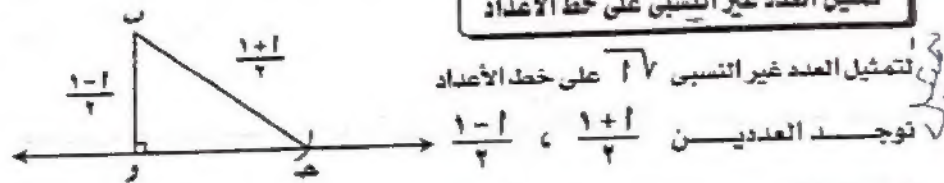
- ① $8 = x^3$ (٢) ② $64 = x^3$ (٤)
 ③ $125 = x^3$ (٥) ④ $1 = 27 + x^3$ (٢٠)
 ⑤ $2 = 1 + x^3$ (١) ⑥ $8 = 9 + x^3$ (١٠)
 ⑦ $8 = 7 + x^3$ (٧) ⑧ $58 = 4 + x^3$ (١)
 ⑨ $17 = 10 - x^3$ (٢) ⑩ $124 = 1 - x^3$ (٢)
 ⑪ $16 = 80 + x^3$ (٢) ⑫ $2 = x^3 - 6 = x^3$ (٢)



ملاحظات

- الأعداد غير النسبية يرمز لها بالرمز \mathbb{H}
- مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{Q} وغير النسبية \mathbb{H} مجموعتان منفصلتان أي أن $\mathbb{H} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$
- أي عدد غير نسبي تنحصر قيمته بين عددين نسبيين
- كل عدد نسبي تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد ولكن كل نقطة على خط الأعداد لا تمثل عدداً نسبياً حيث يوجد نقط أخرى تمثل أعداداً غير نسبية
- يمكن تمثيل أي عدد غير نسبي على الصورة \sqrt{a} على خط الأعداد حيث $a \in \mathbb{Q}$
- العدد غير النسبي يُمثل بعدد عشري غير منته

تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد



نعين نقطة b على عمود مرسوم من نقطة الأصل 0 بحيث $OB = 1$ وحدة طول نركز بسن الفرجار في نقطة b وبفتحة طولها 1 وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة ولتكن c فتكون هي النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2}$ على خط الأعداد

مجموعة الأعداد الحقيقية - \mathbb{R}

مجموعة الأعداد الحقيقية تتكون من اتحاد المجموعتين \mathbb{Q} و \mathbb{H} ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}

أي أن $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{H}$

مجموعة الأعداد غير النسبية \mathbb{H}	مجموعة الأعداد النسبية \mathbb{Q}
مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z}	
مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N}	

• $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- كل عدد حقيقي تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد وكل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً وحيداً
- كل عدد نسبي هو عدد حقيقي ولكن ليس كل عدد حقيقي هو عدد نسبي



مجموعة الأعداد غير النسبية " \mathbb{H} "

مجموعة الأعداد الحقيقية " \mathbb{R} "

علمنا فيما سبق أن العدد النسبي هو العدد الذي يمكن وضعه في صورة $\frac{a}{b}$:
 $1, 2, 3, \dots, 0, \dots, -1, -2, -3, \dots, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ (أي في صورة $\frac{a}{b}$ بسط مقام)
 مثل $2, -3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$
 ومثل الجذر التربيعي للعدد النسبي المربع الكامل مثل $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \dots$
 ومثل الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل مثل $\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{64}, \dots$
 ولكن يوجد كثير من الأعداد لا يمكن وضعها على صورة $\frac{a}{b}$ مثل $\sqrt{2}$
 لأنه لا يوجد عدد نسبي مربعه يساوي 2 وعلى ذلك فإن :

العدد غير النسبي

العدد غير النسبي " \mathbb{H} " هو العدد الذي لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{a}{b}$
 حيث $1, 2, 3, \dots, 0, \dots, -1, -2, -3, \dots$

✓ ومن أمثلة الأعداد غير النسبية :

- ① الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التي ليست مربعات كاملة
 مثال: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots$
- ② الجذور التكعيبية للأعداد التي ليست مكعبات كاملة
 مثال: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{11}, \dots$
- ③ النسبة التقريبية π حيث أنها تساوي $\frac{22}{7}$ تقريباً (أي أنها قيمة تقريبية)
 وهذه الأعداد جميعها لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة لها



أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{2}$

الحل

نبحث عن عددين مربعين كاملين أحدهما أصغر من $\sqrt{2}$ والآخر أكبر من $\sqrt{2}$
فنجد أنهما ١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$
١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$
١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$
١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$

حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $\sqrt{2}$ فنجد أن $\sqrt{2} \approx 1.414213562$
نجد أن $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$
١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$

أوجد عددين نسبيين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{2}$

الحل

بنفس الطريقة السابقة نجد أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين ٢، ٤ وأن $\sqrt{2} = 1 + \text{كسر عشري}$
وبالتجريب نجد أن $1.41 = \sqrt{2}$ ، $1.42 = \sqrt{2}$ ، $1.43 = \sqrt{2}$
..... ، $1.45 = \sqrt{2}$ ، $1.46 = \sqrt{2}$
نلاحظ أن $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ ، $1.45 > \sqrt{2} > 1.46$

أي أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين ١، ٤ ، ١، ٥

ولإيجاد قيمة تقريبية أدق لرقمين عشريين نأخذ العدد الأصغر ١، ٤
وبالتجريب أيضاً $1.41 = \sqrt{2}$ ، $1.42 = \sqrt{2}$ ، $1.43 = \sqrt{2}$
..... ، $1.45 = \sqrt{2}$ ، $1.46 = \sqrt{2}$
١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$ وهكذا

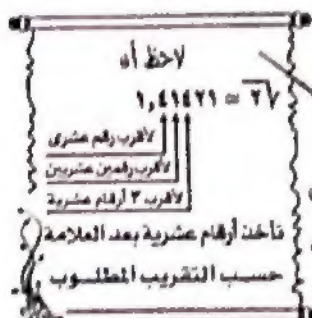
حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $\sqrt{2}$

١، ٤ $1 < \sqrt{2} < 4$ ، ١، ٥ $1 < \sqrt{2} < 5$ لأقرب رقم عشري

١، ٤٢ $1 < \sqrt{2} < 42$ ، ١، ٤١ $1 < \sqrt{2} < 41$ لأقرب رقمين عشريين

١، ٤١٤ $1 < \sqrt{2} < 414$ ، ١، ٤١٥ $1 < \sqrt{2} < 415$ لأقرب ٣ أرقام عشرية



علاقة الترتيب في \mathbb{R}

- جميع الأعداد الحقيقية التي على يمين الصفر تكون أكبر من الصفر وتكون مجموعة
- تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}^+ .
- جميع الأعداد الحقيقية التي على يسار الصفر تكون أصغر من الصفر وتكون مجموعة
- تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ويرمز لها بالرمز \mathbb{R}^- .
- ومن ذلك $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$ ، $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ ، $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$

أمثلة توضيحية

١. وهم أي الأعداد الآتية نسبي وأيها غير نسبي:

٣ $\sqrt{8}$

٢ $\sqrt{16}$

١ $\sqrt{7}$

٦ $\frac{1}{\pi}$

٥ صفر

٤ $\sqrt{9}$

الحل

- ١ $\sqrt{7}$ عدد غير نسبي لأن لا يوجد عدد مربعه يساوي ٧
- ٢ $\sqrt{16}$ عدد نسبي لأن $4 = \sqrt{16}$
- ٣ $\sqrt{8}$ عدد نسبي لأن $2 = \sqrt{8}$
- ٤ $\sqrt{9}$ عدد غير نسبي لأن لا يوجد عدد مكعبه يساوي ٩
- ٥ صفر عدد نسبي لأن صفر $= \frac{\text{صفر}}{1} = \frac{\text{صفر}}{2} = \dots$
- ٦ $\frac{1}{\pi}$ عدد غير نسبي لأن π عدد غير نسبي فيكون $\frac{1}{\pi}$ عدد غير نسبي



مثال ٤ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[3]{3}$

الحل

نبحث عن عدد مكعب كامل أصغر من ٣ وعدد مكعب كامل أكبر من ٣ فنجد أنهما ١، ٨
 $1 < 3 < 8$ $\therefore \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8}$ $\therefore 1 < \sqrt[3]{3} < 2$
 وبالتجريب نجد أن $1.44 = \sqrt[3]{3}$ $\therefore \sqrt[3]{3} \approx 1.4$

حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt[3]{3} = 1.442249$
 لأقرب جزء من عشرة $\sqrt[3]{3} \approx 1.4$
 لأقرب جزء من مائة $\sqrt[3]{3} \approx 1.44$
 لأقرب جزء من ألف $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$

مثال ٥ أثبت أن $\sqrt{17}$ ينحصر بين ٤,١٢ ، ٤,١٣

الحل

$16,9744 = 4,12^2$ ، $17 = (\sqrt{17})^2$ ، $17,0569 = 4,13^2$
 $16,9744 < 17 < 17,0569$ $\therefore 4,12 < \sqrt{17} < 4,13$
 $\therefore \sqrt{17}$ ينحصر بين ٤,١٢ ، ٤,١٣

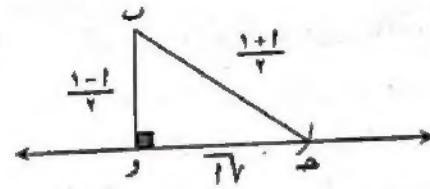
حل آخر:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt{17} \approx 4,1231$
 ونجد أن قيمة $\sqrt{17}$ أكبر من ٤,١٢ وأصغر من ٤,١٣
 $\therefore \sqrt{17}$ ينحصر بين ٤,١٢ ، ٤,١٣



مثال ٦ حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5}$ على خط الأعداد

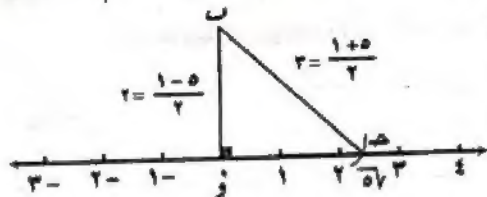
الحل



لتمثيل $\sqrt{2}$ فإننا نوجد طول الضلعين اللذين يمثلان الوتر وأحد ضلعي القائمة مثلث قائم ونرسم هذا المثلث على خط الأعداد

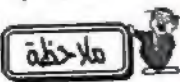
حيث $\frac{1+1}{2}$ يمثل طول وتر المثلث $\frac{1-1}{2}$ ويمثل أحد ضلعي القائمة المرسوم عمودياً على خط الأعداد ونرسم من نقطة ب عموداً يصل إلى نقطة ب حيث $OB = \frac{1-1}{2}$ وحدة طول نركز بسن الفرجار في نقطة ب وبفتحة طولها $\frac{1+1}{2}$ وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة وتكون هي النقطة التي تمثل $\sqrt{2}$ على خط الأعداد ولتمثيل العدد $\sqrt{5}$ على خط الأعداد تتبع الخطوات الآتية:

(١) نوجد العددين اللذين يمثلان طول الوتر وطول الضلع وهما $\sqrt{3} = \frac{1+5}{2}$ ، $\sqrt{2} = \frac{1-5}{2}$

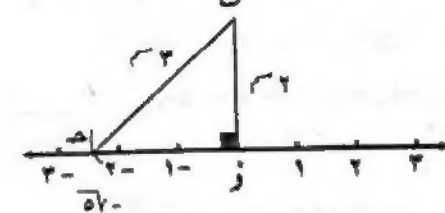


(٢) نرسم خط الأعداد ومن نقطة ب عموداً يصل إلى نقطة ب
 (٣) نركز بسن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها $\sqrt{3} = \frac{1+5}{2}$

ونرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة نسميها ه فتكون نقطة ه هي النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5}$



ملاحظة



• لتمثيل $\sqrt{5}$ على خط الأعداد تتبع نفس الخطوات ولكن نرسم القوس من جهة اليسار



• من نقطة ب تركز سن الفرجار وبفتحة طولها $\sqrt{4}$ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة هـ. وهي النقطة التي تمثل $\sqrt{7}$ تركز سن الفرجار عند نقطة هـ وبفتحة تساوي ١ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة و. وهي النقطة التي تمثل $\sqrt{7} + 1$ (لأن $\sqrt{7} + \sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot 2$)

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية حيث $0 \leq x$:

١) $x^2 = 2$ من ٢ س ١

٢) $x^2 = 5$ من ٢ س ١

٣) $x^2 = 4 + 9$ من ٢ س ١

٤) $x^2 = 11 - 2$ من ٢ س ١

الحل

١) $x^2 = 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{2}$

٢) $x^2 = 5$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{5}$

٣) $x^2 = 4 + 9$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{13}$

٤) $x^2 = 11 - 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{9} = 3$

٥) $x^2 = 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{2}$

٦) $x^2 = 5$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{5}$

٧) $x^2 = 4 + 9$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{13}$

٨) $x^2 = 11 - 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{9} = 3$

٩) $x^2 = 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{2}$

١٠) $x^2 = 5$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{5}$

١١) $x^2 = 4 + 9$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{13}$

١٢) $x^2 = 11 - 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{9} = 3$

١٣) $x^2 = 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{2}$

١٤) $x^2 = 5$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{5}$

١٥) $x^2 = 4 + 9$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{13}$

١٦) $x^2 = 11 - 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{9} = 3$

١٧) $x^2 = 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{2}$

١٨) $x^2 = 5$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{5}$

١٩) $x^2 = 4 + 9$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{13}$

٢٠) $x^2 = 11 - 2$ من ٢ س ١ $\therefore x = \sqrt{9} = 3$



• هذه النقاط التي تمثل الأعداد التالية على خط الأعداد:

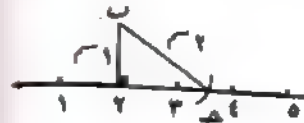
١) $3\sqrt{7} + 2$

٢) $3\sqrt{7} - 2$

٣) $1 - 3\sqrt{7}$

الحل

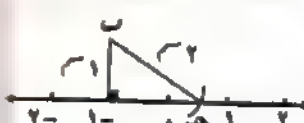
١) لتمثيل $3\sqrt{7} + 2$ فإننا نبدأ من النقطة التي تمثل العدد ٢ وذلك بعد تحديد طول الوتر وطول أحد ضلعي القائمة كما يلي:



ثم نرسم خط الأعداد ومن النقطة التي تمثل العدد ٢ نقيم عمود طوله $\sqrt{4} = 2$ يصل إلى نقطة ب تركز سن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها $\sqrt{7}$ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في النقطة هـ فتكون نقطة هـ هي النقطة التي تمثل $3\sqrt{7} + 2$



٢) لتمثيل $3\sqrt{7} - 2$ فإننا نقوم بنفس الخطوات ولكن نرسم قوساً يقطع خط الأعداد من الجهة اليسرى



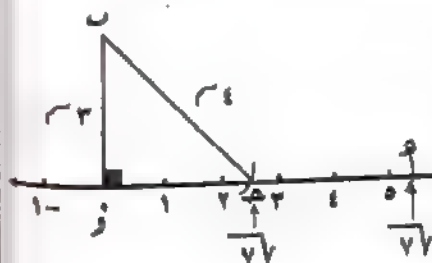
٣) لتمثيل العدد $1 - 3\sqrt{7}$ يفضل أن نجعله على الصورة $1 - 3\sqrt{7}$ وب نفس الطريقة نقيم عمود من عند النقطة التي تمثل العدد ١ طوله $\sqrt{4} = 2$ ليصل

لنقطة ب تركز سن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها $\sqrt{7}$ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة هـ فتكون هي النقطة التي تمثل $1 - 3\sqrt{7}$

• هذه النقاط التي تمثل العدد $3\sqrt{7} + 2$ على خط الأعداد

الحل

نمثل $3\sqrt{7}$ أولاً على خط الأعداد $\therefore 3 = \frac{1-7}{4}$ $\therefore 4 = \frac{1+7}{4}$



• نرسم خط الأعداد ومن نقطة ١ نرسم عمود طوله $\sqrt{4} = 2$ يصل لنقطة ب





تمارين (٣)

على مجموعة الأعداد غير النسبية



ساعة امتحان ومراجعة



أولاً: راجع معنا واختبر نفسك



١) أكمل ما يأتي:

١) $\sqrt{\frac{3}{8}} = \dots\dots\dots$

٢) $\sqrt{4} = \dots\dots\dots$

٣) $\sqrt{\frac{1}{8} \times 1000} = \dots\dots\dots$

٤) إذا كان $\frac{4}{3} = \frac{س}{4}$ فإن س = $\dots\dots\dots$



ب) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث $س \in \mathbb{R}$

١) $س + 27 = ٥$

٢) $٣(س + ٣) = ٣٤٣$

.....

.....

.....

.....



ج) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث $س \in \mathbb{R}$

١) $\frac{س}{5} = \frac{٢}{٥}$

٢) $س - ٥ = ٣ + س$

.....

.....

.....

.....



تدريب (٢)

اذكر بعض الأمثلة لأعداد نسبية وبعض الأمثلة لأعداد غير نسبية:

.....

.....

تدريب (٣)

أثبت أن $٣,٤ > \sqrt{١٢} > ٣,٥$

بكم العمل

$\sqrt{١٢} = \sqrt{٣ \times ٤} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٤} = \sqrt{٣} \times ٢ = ٢\sqrt{٣}$

$\sqrt{١٢} > ٣,٤ \Leftrightarrow ٢\sqrt{٣} > ٣,٤ \Leftrightarrow \sqrt{٣} > ١,٧$

$\sqrt{٣} > ١,٧ \Leftrightarrow ٣ > ١,٧^2 \Leftrightarrow ٣ > ٢,٩٦$

$\sqrt{٣} > ١,٧$



تدريب (٤)

هذه النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{٣}$ على خط الأعداد

بكم العمل



يمكن أيضاً تمثيل العدد $١ + \sqrt{٣}$ بأن $\dots\dots\dots$

تدريب (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة $س + ٢ = ٤$ حيث $س \in \mathbb{R}$

بكم العمل

$س + ٢ = ٤ \Leftrightarrow س = ٤ - ٢ \Leftrightarrow س = ٢$

$س = ٢$

$\{٢\}$





✓ ١٣ العدد غير النسبي المحصور بين -٢ - ١ هو

[$\sqrt{2}$ د ٣ - د ١,٥ - د $\sqrt{3}$ - د ٣]

✓ ١٤ أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt{25}$ هو

[٥ د ٣ د ٢ د ١٢,٥]

[ϕ د π د $\sqrt{2}$ د صفر] = ١٥

[ϕ د π د $\sqrt{2}$ د صفر] = ١٦

[ϕ د π د $\sqrt{2}$ د صفر] = ١٧

[ϕ د π د $\sqrt{2}$ د صفر] = ١٨

[ϕ د π د $\sqrt{2}$ د صفر] = ١٩

٤ أو الأعداد الآتية نسبي وأيها غير نسبي :

$\sqrt{2}$ ، ٣ ، $\sqrt{4}$ ، صفر ، $\sqrt{27}$ ، -١,٧ ، - $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{\frac{16}{25}}$



مسائل المستوى الثاني

٥ أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد :

١) $\sqrt{5}$ ٢) $\sqrt{12}$ ٣) $\sqrt{10}$ ٤) $\sqrt{20}$

٦ إذا كانت س عدداً صحيحاً فأوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية :

١) $\sqrt{2} > 1 + س > \sqrt{8}$ ٢) $\sqrt{2} > 1 + س > \sqrt{10}$

٣) $\sqrt{2} > 1 + س > \sqrt{12}$ ٤) $\sqrt{2} > 1 + س > \sqrt{14}$

٥) $\sqrt{2} > 1 + س > \sqrt{16}$ ٦) $\sqrt{2} > 1 + س > \sqrt{18}$

٧ ١) أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt{2}$

٢) أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{2}$

٣) أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt{2}$



ثانياً : اجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي باستخدام أحد الرمزتين هـ أو هـ :

١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣) صفر $\dots \sqrt{2}$

٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٥) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٦) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٧) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٨) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٩) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

١٠) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٥) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٦) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٧) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٨) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٩) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

١٠) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

١٣) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١٥) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

١٦) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١٧) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ١٨) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

١٩) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢٠) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٢٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢٣) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٢٥) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢٦) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢٧) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٢٨) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٢٩) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٠) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٣١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٣) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٣٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٥) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٦) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٣٧) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٨) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٣٩) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٤٠) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٤١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٤٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٤٣) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٤٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٤٥) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٤٦) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٤٧) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٤٨) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٤٩) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٥٠) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٥١) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$

٥٢) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٥٣) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$ ٥٤) $\sqrt{2} \dots \sqrt{3}$



١٥ أوجد كلاً من طول ضلع وطول قطر مربع مساحته $3\sqrt{7}$ [٣٧، ٣٨]

٢ دائرة مساحة سطحها 3π أوجد محيطها [٣٩، ٤٠]

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١ المربع الذي طول ضلعه $3\sqrt{7}$ تكون مساحته = [٦ د ٣ د ٩١ د ٣٧٤]

٢ المربع الذي مساحته $10\sqrt{5}$ يكون طول ضلعه [١٠ د ٥ د ٥٠ د ١٠٠]

٣ المكعب الذي حجمه $64\sqrt{8}$ يكون طول حرفه [٨ د ٤ د ٦ د ٦٤]

٤ إذا كان $s \geq m$ وكان $s > 25 - \sqrt{3}$ فإن $s =$ [٤ - د ١ - د ٢ - د ٣ -]

٥ إذا كان $s \geq m$ وكان $s > |45 - \sqrt{5}|$ فإن $s =$ [٨ د ٦ د ٧ د ٥]



مسائل المتفوقين

١٧ ارسم المثلث ABC القائم الزاوية في B حيث $AB = 2\sqrt{3}$ ، $BC = 3\sqrt{3}$ واستخدم الشكل في تحديد النقطة التي تمثل العدد $13\sqrt{7}$ والنقطة التي تمثل العدد $13\sqrt{7} -$ على خط الأعداد

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

إذا كان $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ، عدنان حقيقيان يقعان بين صفر ، ١ فإن $a =$ [٢ - د ١ د ٥ د ٧]

١٩ اكتب أربعة أعداد غير نسبية محصورة بين ٦ ، ٨

٢٠ أوجد مجموعة حل المعادلة $s + 2\sqrt{3} = 3$ ومثل الحل على خط الأعداد

٨ أوجد قيمة تقريبية للعدد $10\sqrt{7}$ وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة

٩ أثبت أن :

$$2,24 > 5\sqrt{7} > 2,23$$

$$2,65 > 7\sqrt{7} > 2,64$$

$$1,8 > 3\sqrt{7} > 1,7$$

$$2,45 > 6\sqrt{7} > 2,44$$

١٠ اثبت أن :

$$10\sqrt{7} \text{ ينحصر بين } 3,2 \text{ و } 3,3 \text{ ينحصر بين } 11\sqrt{7} \text{ و } 3,32 \text{ و } 3,31$$

$$13\sqrt{7} \text{ ينحصر بين } 3,6 \text{ و } 3,7 \text{ ينحصر بين } 15\sqrt{7} \text{ و } 3,88 \text{ و } 3,87$$

$$11\sqrt{7} \text{ ينحصر بين } 2,23 \text{ و } 2,24 \text{ ينحصر بين } 51\sqrt{7} \text{ و } 3,8 \text{ و } 3,7$$

١١ رتب تنازلياً :

$$70\sqrt{7}, 50\sqrt{7}, 8, 62\sqrt{7}$$

١٢ هذه النقط التي تمثل الأعداد الآتية على خط الأعداد :

$$5\sqrt{7} \text{ ١ } 6\sqrt{7} \text{ ٢ } 5\sqrt{7} + 2 \text{ ٣ } 7\sqrt{7} + 2 - \text{ ٤ } 1 + 5\sqrt{7} \text{ ٥ } 6\sqrt{7} - 2 \text{ ٦ } 7\sqrt{7} - 2 - \text{ ٧ } 5\sqrt{7} - 2 \text{ ٨ } 6\sqrt{7} - 2 \text{ ٩ } 7\sqrt{7} - 2 \text{ ١٠ } 8\sqrt{7} - 2 \text{ ١١ } 9\sqrt{7} - 2 \text{ ١٢ } 10\sqrt{7} - 2 \text{ ١٣ } 11\sqrt{7} - 2 \text{ ١٤ } 12\sqrt{7} - 2 \text{ ١٥ } 13\sqrt{7} - 2 \text{ ١٦ } 14\sqrt{7} - 2 \text{ ١٧ } 15\sqrt{7} - 2 \text{ ١٨ } 16\sqrt{7} - 2 \text{ ١٩ } 17\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٠ } 18\sqrt{7} - 2 \text{ ٢١ } 19\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٢ } 20\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٣ } 21\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٤ } 22\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٥ } 23\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٦ } 24\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٧ } 25\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٨ } 26\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٩ } 27\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٠ } 28\sqrt{7} - 2 \text{ ٣١ } 29\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٢ } 30\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٣ } 31\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٤ } 32\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٥ } 33\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٦ } 34\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٧ } 35\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٨ } 36\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٩ } 37\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٠ } 38\sqrt{7} - 2 \text{ ٤١ } 39\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٢ } 40\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٣ } 41\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٤ } 42\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٥ } 43\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٦ } 44\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٧ } 45\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٨ } 46\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٩ } 47\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٠ } 48\sqrt{7} - 2 \text{ ٥١ } 49\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٢ } 50\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٣ } 51\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٤ } 52\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٥ } 53\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٦ } 54\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٧ } 55\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٨ } 56\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٩ } 57\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٠ } 58\sqrt{7} - 2 \text{ ٦١ } 59\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٢ } 60\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٣ } 61\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٤ } 62\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٥ } 63\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٦ } 64\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٧ } 65\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٨ } 66\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٩ } 67\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٠ } 68\sqrt{7} - 2 \text{ ٧١ } 69\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٢ } 70\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٣ } 71\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٤ } 72\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٥ } 73\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٦ } 74\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٧ } 75\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٨ } 76\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٩ } 77\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٠ } 78\sqrt{7} - 2 \text{ ٨١ } 79\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٢ } 80\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٣ } 81\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٤ } 82\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٥ } 83\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٦ } 84\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٧ } 85\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٨ } 86\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٩ } 90\sqrt{7} - 2 \text{ ٩١ } 91\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٢ } 92\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٣ } 93\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٤ } 94\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٥ } 95\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٦ } 96\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٧ } 98\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٩ } 100\sqrt{7} - 2$$

$$7\sqrt{7} + 2 - \text{ ٦ } 1 + 5\sqrt{7} \text{ ٧ } 6\sqrt{7} - 2 \text{ ٨ } 7\sqrt{7} - 2 \text{ ٩ } 8\sqrt{7} - 2 \text{ ١٠ } 9\sqrt{7} - 2 \text{ ١١ } 10\sqrt{7} - 2 \text{ ١٢ } 11\sqrt{7} - 2 \text{ ١٣ } 12\sqrt{7} - 2 \text{ ١٤ } 13\sqrt{7} - 2 \text{ ١٥ } 14\sqrt{7} - 2 \text{ ١٦ } 15\sqrt{7} - 2 \text{ ١٧ } 16\sqrt{7} - 2 \text{ ١٨ } 17\sqrt{7} - 2 \text{ ١٩ } 18\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٠ } 19\sqrt{7} - 2 \text{ ٢١ } 20\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٢ } 21\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٣ } 22\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٤ } 23\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٥ } 24\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٦ } 25\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٧ } 26\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٨ } 27\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٩ } 28\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٠ } 29\sqrt{7} - 2 \text{ ٣١ } 30\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٢ } 31\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٣ } 32\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٤ } 33\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٥ } 34\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٦ } 35\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٧ } 36\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٨ } 37\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٩ } 38\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٠ } 39\sqrt{7} - 2 \text{ ٤١ } 40\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٢ } 41\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٣ } 42\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٤ } 43\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٥ } 44\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٦ } 45\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٧ } 46\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٨ } 47\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٩ } 48\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٠ } 49\sqrt{7} - 2 \text{ ٥١ } 50\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٢ } 51\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٣ } 52\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٤ } 53\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٥ } 54\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٦ } 55\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٧ } 56\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٨ } 57\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٩ } 58\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٠ } 59\sqrt{7} - 2 \text{ ٦١ } 60\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٢ } 61\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٣ } 62\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٤ } 63\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٥ } 64\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٦ } 65\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٧ } 66\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٨ } 67\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٩ } 68\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٠ } 69\sqrt{7} - 2 \text{ ٧١ } 70\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٢ } 71\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٣ } 72\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٤ } 73\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٥ } 74\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٦ } 75\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٧ } 76\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٨ } 77\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٩ } 78\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٠ } 79\sqrt{7} - 2 \text{ ٨١ } 80\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٢ } 81\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٣ } 82\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٤ } 83\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٥ } 84\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٦ } 85\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٧ } 86\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٨ } 87\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٩ } 90\sqrt{7} - 2 \text{ ٩١ } 91\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٢ } 92\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٣ } 93\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٤ } 94\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٥ } 95\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٦ } 96\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٧ } 98\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٩ } 100\sqrt{7} - 2$$

$$1 + 5\sqrt{7} \text{ ٧ } 6\sqrt{7} - 2 \text{ ٨ } 7\sqrt{7} - 2 \text{ ٩ } 8\sqrt{7} - 2 \text{ ١٠ } 9\sqrt{7} - 2 \text{ ١١ } 10\sqrt{7} - 2 \text{ ١٢ } 11\sqrt{7} - 2 \text{ ١٣ } 12\sqrt{7} - 2 \text{ ١٤ } 13\sqrt{7} - 2 \text{ ١٥ } 14\sqrt{7} - 2 \text{ ١٦ } 15\sqrt{7} - 2 \text{ ١٧ } 16\sqrt{7} - 2 \text{ ١٨ } 17\sqrt{7} - 2 \text{ ١٩ } 18\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٠ } 19\sqrt{7} - 2 \text{ ٢١ } 20\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٢ } 21\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٣ } 22\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٤ } 23\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٥ } 24\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٦ } 25\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٧ } 26\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٨ } 27\sqrt{7} - 2 \text{ ٢٩ } 28\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٠ } 29\sqrt{7} - 2 \text{ ٣١ } 30\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٢ } 31\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٣ } 32\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٤ } 33\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٥ } 34\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٦ } 35\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٧ } 36\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٨ } 37\sqrt{7} - 2 \text{ ٣٩ } 38\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٠ } 39\sqrt{7} - 2 \text{ ٤١ } 40\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٢ } 41\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٣ } 42\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٤ } 43\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٥ } 44\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٦ } 45\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٧ } 46\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٨ } 47\sqrt{7} - 2 \text{ ٤٩ } 48\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٠ } 49\sqrt{7} - 2 \text{ ٥١ } 50\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٢ } 51\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٣ } 52\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٤ } 53\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٥ } 54\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٦ } 55\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٧ } 56\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٨ } 57\sqrt{7} - 2 \text{ ٥٩ } 58\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٠ } 59\sqrt{7} - 2 \text{ ٦١ } 60\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٢ } 61\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٣ } 62\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٤ } 63\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٥ } 64\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٦ } 65\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٧ } 66\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٨ } 67\sqrt{7} - 2 \text{ ٦٩ } 68\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٠ } 69\sqrt{7} - 2 \text{ ٧١ } 70\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٢ } 71\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٣ } 72\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٤ } 73\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٥ } 74\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٦ } 75\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٧ } 76\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٨ } 77\sqrt{7} - 2 \text{ ٧٩ } 78\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٠ } 79\sqrt{7} - 2 \text{ ٨١ } 80\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٢ } 81\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٣ } 82\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٤ } 83\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٥ } 84\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٦ } 85\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٧ } 86\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٨ } 87\sqrt{7} - 2 \text{ ٨٩ } 90\sqrt{7} - 2 \text{ ٩١ } 91\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٢ } 92\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٣ } 93\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٤ } 94\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٥ } 95\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٦ } 96\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٧ } 98\sqrt{7} - 2 \text{ ٩٩ } 100\sqrt{7} - 2$$

١٣ ارسم خط الأعداد وهذه عليه النقطة A التي تمثل العدد $2\sqrt{7}$ والنقطة B التي تمثل العدد $2\sqrt{7} + 1$ والنقطة C التي تمثل العدد $2\sqrt{7} - 1$

١٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في \mathbb{R} :

$$\text{١ } s = 3 \text{ ٢ } s = 2 \text{ ٣ } s = 1 \text{ ٤ } s = 0 \text{ ٥ } s = -1 \text{ ٦ } s = -2 \text{ ٧ } s = -3 \text{ ٨ } s = -4 \text{ ٩ } s = -5 \text{ ١٠ } s = -6 \text{ ١١ } s = -7 \text{ ١٢ } s = -8 \text{ ١٣ } s = -9 \text{ ١٤ } s = -10 \text{ ١٥ } s = -11 \text{ ١٦ } s = -12 \text{ ١٧ } s = -13 \text{ ١٨ } s = -14 \text{ ١٩ } s = -15 \text{ ٢٠ } s = -16 \text{ ٢١ } s = -17 \text{ ٢٢ } s = -18 \text{ ٢٣ } s = -19 \text{ ٢٤ } s = -20 \text{ ٢٥ } s = -21 \text{ ٢٦ } s = -22 \text{ ٢٧ } s = -23 \text{ ٢٨ } s = -24 \text{ ٢٩ } s = -25 \text{ ٣٠ } s = -26 \text{ ٣١ } s = -27 \text{ ٣٢ } s = -28 \text{ ٣٣ } s = -29 \text{ ٣٤ } s = -30 \text{ ٣٥ } s = -31 \text{ ٣٦ } s = -32 \text{ ٣٧ } s = -33 \text{ ٣٨ } s = -34 \text{ ٣٩ } s = -35 \text{ ٤٠ } s = -36 \text{ ٤١ } s = -37 \text{ ٤٢ } s = -38 \text{ ٤٣ } s = -39 \text{ ٤٤ } s = -40 \text{ ٤٥ } s = -41 \text{ ٤٦ } s = -42 \text{ ٤٧ } s = -43 \text{ ٤٨ } s = -44 \text{ ٤٩ } s = -45 \text{ ٥٠ } s = -46 \text{ ٥١ } s = -47 \text{ ٥٢ } s = -48 \text{ ٥٣ } s = -49 \text{ ٥٤ } s = -50 \text{ ٥٥ } s = -51 \text{ ٥٦ } s = -52 \text{ ٥٧ } s = -53 \text{ ٥٨ } s = -54 \text{ ٥٩ } s = -55 \text{ ٦٠ } s = -56 \text{ ٦١ } s = -57 \text{ ٦٢ } s = -58 \text{ ٦٣ } s = -59 \text{ ٦٤ } s = -60 \text{ ٦٥ } s = -61 \text{ ٦٦ } s = -62 \text{ ٦٧ } s = -63 \text{ ٦٨ } s = -64 \text{ ٦٩ } s = -65 \text{ ٧٠ } s = -66 \text{ ٧١ } s = -67 \text{ ٧٢ } s = -68 \text{ ٧٣ } s = -69 \text{ ٧٤ } s = -70 \text{ ٧٥ } s = -71 \text{ ٧٦ } s = -72 \text{ ٧٧ } s = -73 \text{ ٧٨ } s = -74 \text{ ٧٩ } s = -75 \text{ ٨٠ } s = -76 \text{ ٨١ } s = -77 \text{ ٨٢ } s = -78 \text{ ٨٣ } s = -79 \text{ ٨٤ } s = -80 \text{ ٨٥ } s = -81 \text{ ٨٦ } s = -82 \text{ ٨٧ } s = -83 \text{ ٨٨ } s = -84 \text{ ٨٩ } s = -85 \text{ ٩٠ } s = -86 \text{ ٩١ } s = -87 \text{ ٩٢ } s = -88 \text{ ٩٣ } s = -89 \text{ ٩٤ } s = -90 \text{ ٩٥ } s = -91 \text{ ٩٦ } s = -92 \text{ ٩٧ } s = -93 \text{ ٩٨ } s = -94 \text{ ٩٩ } s = -95 \text{ ١٠٠ } s = -96 \text{ ١٠١ } s = -97 \text{ ١٠٢ } s = -98 \text{ ١٠٣ } s = -99 \text{ ١٠٤ } s = -100 \text{ ١٠٥ } s = -101 \text{ ١٠٦ } s = -102 \text{ ١٠٧ } s = -103 \text{ ١٠٨ } s = -104 \text{ ١٠٩ } s = -105 \text{ ١١٠ } s = -106 \text{ ١١١ } s = -107 \text{ ١١٢ } s = -108 \text{ ١١٣ } s = -109 \text{ ١١٤ } s = -110 \text{ ١١٥ } s = -111 \text{ ١١٦ } s = -112 \text{ ١١٧ } s = -113 \text{ ١١٨ } s = -114 \text{ ١١٩ } s = -115 \text{ ١٢٠ } s = -116 \text{ ١٢١ } s = -117 \text{ ١٢٢ } s = -118 \text{ ١٢٣ } s = -119 \text{ ١٢٤ } s = -120 \text{ ١٢٥ } s = -121 \text{ ١٢٦ } s = -122 \text{ ١٢٧ } s = -123 \text{ ١٢٨ } s = -124 \text{ ١٢٩ } s = -125 \text{ ١٣٠ } s = -126 \text{ ١٣١ } s = -127 \text{ ١٣٢ } s = -128 \text{ ١٣٣ } s = -129 \text{ ١٣٤ } s = -130 \text{ ١٣٥ } s = -131 \text{ ١٣٦ } s = -132 \text{ ١٣٧ } s = -133 \text{ ١٣٨ } s = -134 \text{ ١٣٩ } s = -135 \text{ ١٤٠ } s = -136 \text{ ١٤١ } s = -137 \text{ ١٤٢ } s = -138 \text{ ١٤٣ } s = -139 \text{ ١٤٤ } s = -140 \text{ ١٤٥ } s = -141 \text{ ١٤٦ } s = -142 \text{ ١٤٧ } s = -143 \text{ ١٤٨ } s = -144 \text{ ١٤٩ } s = -145 \text{ ١٥٠ } s = -146 \text{ ١٥١ } s = -147 \text{ ١٥٢ } s = -148 \text{ ١٥٣ } s = -149 \text{ ١٥٤ } s = -150 \text{ ١٥٥ } s = -151 \text{ ١٥٦ } s = -152 \text{ ١٥٧ } s = -153 \text{ ١٥٨ } s = -154 \text{ ١٥٩ } s = -155 \text{ ١٦٠ } s = -156 \text{ ١٦١ } s = -157 \text{ ١٦٢ } s = -158 \text{ ١٦٣ } s = -159 \text{ ١٦٤ } s = -160 \text{ ١٦٥ } s = -161 \text{ ١٦٦ } s = -162 \text{ ١٦٧ } s = -163 \text{ ١٦٨ } s = -164 \text{ ١٦٩ } s = -165 \text{ ١٧٠ } s = -166 \text{ ١٧١ } s = -167 \text{ ١٧٢ } s = -168 \text{ ١٧٣ } s = -169 \text{ ١٧٤ } s = -170 \text{ ١٧٥ } s = -171 \text{ ١٧٦ } s = -172 \text{ ١٧٧ } s = -173 \text{ ١٧٨ } s = -174 \text{ ١٧٩ } s = -175 \text{ ١٨٠ } s = -176 \text{ ١٨١ } s = -177 \text{ ١٨٢ } s = -178 \text{ ١٨٣ } s = -179 \text{ ١٨٤ } s = -180 \text{ ١٨٥ } s = -181 \text{ ١٨٦ } s = -182 \text{ ١٨٧ } s = -183 \text{ ١٨٨ } s = -184 \text{ ١٨٩ } s = -185 \text{ ١٩٠ } s = -186 \text{ ١٩١ } s = -187 \text{ ١٩٢ } s = -188 \text{ ١٩٣ } s = -189 \text{ ١٩٤ } s = -190 \text{ ١٩٥ } s = -191 \text{ ١٩٦ } s = -192 \text{ ١٩٧ } s = -193 \text{ ١٩٨ } s = -194 \text{ ١٩٩ } s = -195 \text{ ٢٠٠ } s = -196 \text{ ٢٠١ } s = -197 \text{ ٢٠٢ } s = -198 \text{ ٢٠٣ } s = -199 \text{ ٢٠٤ } s = -200 \text{ ٢٠٥ } s = -201 \text{ ٢٠٦ } s = -202 \text{ ٢٠٧ } s = -203 \text{ ٢٠٨ } s = -204 \text{ ٢٠٩ } s = -205 \text{ ٢١٠ } s = -206 \text{ ٢١١ } s = -207 \text{ ٢١٢ } s = -208 \text{ ٢١٣ } s = -209 \text{ ٢١٤ } s = -210 \text{ ٢١٥ } s = -211 \text{ ٢١٦ } s = -212 \text{ ٢١٧ } s = -213 \text{ ٢١٨ } s = -214 \text{ ٢١٩ } s = -215 \text{ ٢٢٠ } s = -216 \text{ ٢٢١ } s = -217 \text{ ٢٢٢ } s = -218 \text{ ٢٢٣ } s = -219 \text{ ٢٢٤ } s = -220 \text{ ٢٢٥ } s = -221 \text{ ٢٢٦ } s = -222 \text{ ٢٢٧ } s = -223 \text{ ٢٢٨ } s = -224 \text{ ٢٢٩ } s = -225 \text{ ٢٣٠ } s = -226 \text{ ٢٣١ } s = -227 \text{ ٢٣٢ } s = -228 \text{ ٢٣٣ } s = -229 \text{ ٢٣٤ } s = -230 \text{ ٢٣٥ } s = -231 \text{ ٢٣٦ } s = -232 \text{ ٢٣٧ } s = -233 \text{ ٢٣٨ } s = -234 \text{ ٢٣٩ } s = -235 \text{ ٢٤٠ } s = -236 \text{ ٢٤١ } s = -237 \text{ ٢٤٢ } s = -238 \text{ ٢٤٣ } s = -239 \text{ ٢٤٤ } s = -240 \text{ ٢٤٥ } s = -241 \text{ ٢٤٦ } s = -242 \text{ ٢٤٧ } s = -243 \text{ ٢٤٨ } s = -244 \text{ ٢٤٩ } s = -245 \text{ ٢٥٠ } s = -246 \text{ ٢٥١ } s = -247 \text{ ٢٥٢ } s = -248 \text{ ٢٥٣ } s = -249 \text{ ٢٥٤ } s = -250 \text{ ٢٥٥ } s = -251 \text{ ٢٥٦ } s = -252 \text{ ٢٥٧ } s = -253 \text{ ٢٥٨ } s = -254 \text{ ٢٥٩ } s = -255 \text{ ٢٦٠ } s = -256 \text{ ٢٦١ } s = -257 \text{ ٢٦٢ } s = -258 \text{ ٢٦٣ } s = -259 \text{ ٢٦٤ } s = -260 \text{ ٢٦٥ } s = -261 \text{ ٢٦٦ } s = -262 \text{ ٢٦٧ } s = -263 \text{ ٢٦٨ } s =$$

الفترات

إذا اتصلت تليفونياً بأحد أصدقائك في أوقات مختلفة مثل الساعة ٤، والساعة ٥، والساعة ٦ ووجدت تليفونه مشغول فتقول اتصلت في مجموعة أوقات مختلفة ويمكن كتابة هذه الأوقات في صورة مجموعة مثل $\{٦، ٥، ٤\}$ لأنها أوقات مختلفة ومتباعدة أما إذا رد صديقك وظلت المكالمات من الساعة ٤ إلى الساعة ٦ وما بينهما وفي هذه أننا اتصلنا لفترة زمنية من الساعة ٤ إلى الساعة ٦ وما بينهما وفي هذه الحالة نكتب بالصورة $[٦، ٤]$ وهنا يتضح الفرق بين المجموعة والفترتين فالفترة تكون متصلة دون انقطاع لعددتين وما بينهما ونضعها في أقواس بالشكل $[]$ أما المجموعة فهي لأوقات أو أعداد متقطعة أو متباعدة ونضعها في أقواس بالشكل $\{ \}$ والمجموعة يكتب فيها عدد أو أكثر وعند دراسة مجموعة الأعداد الحقيقية فإننا نحتاج للتعامل مع مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية فإذا نظرنا لخط الأعداد الحقيقية نجده يمثل مجموعة من الأعداد الحقيقية في صورة نقاط متصلة فإذا أردنا أن نأخذ أرقام بعينها مثل $٥، ٤، ٣، ٢$ فنكتب في صورة مجموعة أما إذا أردنا أرقام أو أعداد من ٢ إلى ٤ وما بينهما فنكتب في صورة فترة وما سبق نجد أن:

الفترات هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي نوعان (فترات محدودة - فترات غير محدودة)

أولاً : الفترات المحدودة

الفترة المغلقة

يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية التي تتكون من العددين ٥، ٢ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما بطريقتين :
طريقة الصفة المميزة بالشكل $\{ س : س \geq ٢، س \leq ٥ \}$
أو بصورة فترة بالشكل $[٥، ٢]$ وتسمى فترة مغلقة لأننا أخذنا العددين ٥، ٢ مع مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما لاحظ أن $٢ \in [٥، ٢]$ ، $٥ \in [٥، ٢]$

الفترة المفتوحة

أما إذا أخذنا الأعداد الحقيقية المحصورة بين ٥، ٢ وليس معهم ٥، ٢ فنكتب بالصورة $]٥، ٢[$ وتسمى هذه الفترة بالفترة المفتوحة ونلاحظ هنا أن $٢ \notin]٥، ٢[$ ، $٥ \notin]٥، ٢[$

الفترة النصف مفتوحة أو النصف مغلقة

وإذا أخذنا مجموعة الأعداد المحصورة بين ٥، ٢ ومعها العدد ٢ نكتب بالصورة $]٥، ٢]$ وتسمى فترة نصف مفتوحة ونلاحظ هنا أن $٢ \in]٥، ٢]$ أما $٥ \notin]٥، ٢]$ وفيما يلي ملخص للفترات المحدودة :
إذا كان $٢، ب$ عددين حقيقيين ، $٢ > ب$ فإن :

الفترة	التعبير عنها بالصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد
فترة مغلقة $[٢، ب]$	$\{ س : س \geq ٢، س \leq ب \}$	
فترة مفتوحة $]٢، ب[$	$\{ س : س > ٢، س < ب \}$	
فترة نصف مغلقة $]٢، ب]$	$\{ س : س > ٢، س \leq ب \}$	
أو نصف مفتوحة $[٢، ب[$	$\{ س : س \geq ٢، س < ب \}$	

ثانياً : الفترات غير المحدودة

إذا أردنا التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية تبدأ بعدد معين وغير منتهية مثل العدد ٢ وجميع الأعداد التي أكبر منه فيمكن التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة بالشكل $\{ س : س \geq ٢ \}$ أو بصورة فترة بالشكل $[٢، \infty)$ وهذه الفترة غير محدودة لأنها تبدأ بالعدد ٢ ولكنها غير منتهية مع ملاحظة ما يلي :

- الرمز ∞ يقرأ ما لا نهاية ويعني أنه أكبر من أي عدد يمكن تصوره
- الرمز $-\infty$ يقرأ سالب ما لا نهاية ويعني أنه أصغر من أي عدد يمكن تصوره
- الرمزان $-\infty$ ، ∞ ليسا عددين حقيقيين ولا توجد نقطتان تمثلهما



وهيما إلى ملخص للفترة غير المحلولة :

إذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن :

الفترة	التعبير عنها بالصفة للميزة	تمثيلها على خط الأعداد
$]a, \infty[$	$\{x : x > a\}$	
$[a, \infty[$	$\{x : x \geq a\}$	
$]-\infty, a[$	$\{x : x < a\}$	
$]-\infty, a]$	$\{x : x \leq a\}$	

ملاحظات

$$\mathbb{R} = \{x : x > -\infty, x < \infty\} =]-\infty, \infty[$$

- مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $]0, \infty[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $]-\infty, 0[$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة $]-\infty, 0[$ (أي السالبة والصفر)
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $]0, \infty[$ (أي الموجبة والصفر)

أمثلة توضيحية

اكتب كلاماً يأتي على صورة فترة ثم ظللها على خط الأعداد :

$$① \quad \{x : x > 1, x \leq 3\}$$

$$② \quad \{x : x < 2, x \geq 1\}$$

الحل

$$① \quad \{x : 1 < x \leq 3\}$$



ملاحظة
عند كتابة الفترة
يجب كتابة
العدد الأصغر أولاً

لاحظ أن العدد 3 \in للفترة لذلك فإننا
نضع دائرة ونظللها أما 1 \notin للفترة لذلك
نضع دائرة غير مظللة على خط الأعداد

$$④ \quad \{x : x \leq 2\}$$



لاحظ أن 2 \in للفترة فنضع دائرة مظللة أما 1 \notin للفترة
إلى مالا نهاية لذلك فنظل خط الأعداد من الجهة الموجبة حتى رأس المسطرة

وهو عن كلاً من الفترات الآتية رمزياً بطريقة الصفة المميزة
ومثلها على خط الأعداد :

$$⑤ \quad \{x : x \geq 0\} \quad ⑥ \quad \{x : x \leq -1\}$$

الحل

$$① \quad \{x : x \geq 2, x \leq 4\} = [2, 4]$$

$$② \quad \{x : x > 1, x \leq 3\} = (1, 3]$$

$$③ \quad \{x : x \leq 0\} = (-\infty, 0]$$

$$④ \quad \{x : x \leq -1\} = (-\infty, -1]$$

أوجد كلاماً يأتي على صورة فترة مستقيماً بخط الأعداد :

$\{x : x > 1, x \leq 3\}$ ، $\{x : x < 2, x \geq 1\}$ ، $\{x : x \leq 0\}$ ، $\{x : x \leq -1\}$

الحل

$$\{x : x > 1, x \leq 3\} = (1, 3]$$

المجموعتين $\{x : x > 1\}$ و $\{x : x \leq 3\}$

$$\{x : x < 2, x \geq 1\} = [1, 2)$$

$$\{x : x \leq 0\} = (-\infty, 0]$$

$$\{x : x \leq -1\} = (-\infty, -1]$$

المجموعة العناصر المشتركة بين $\{x : x > 1\}$ و $\{x : x \leq 3\}$

$$\{x : x > 1, x \leq 3\} = (1, 3]$$

$$\{x : x < 2, x \geq 1\} = [1, 2)$$



(نضع دائرة مظللة عند إيجاد الفترة)



الفنان

الحل

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ✓ ① | × ④ | × ③ | ✓ ② | × ① |
| ✓ ⑩ | × ⑨ | × ⑧ | ✓ ⑦ | ✓ ⑥ |

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

① { س : س \exists ع ، ع \exists س } على صورة فترة هي

وتمثل على خط الأعداد بالشكل



② [٤ ، ٠] رمزياً بطريقة الصفة المميزة هي {

وتمثل على خط الأعداد بالشكل



تدريب (٢)

إذا كان س = [-١٤٢ ، ٤] ، ع = [٣٤٠ ، ...] فأوجد مستعيناً بخط الأعداد

كل مما يأتي :



س \cup ع = ، س \cap ع =

س - ع = ، ع - س =

تدريب (٣)

أكمل كلاً مما يأتي على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد المرسوم :

① [٤ ، ٢] \cup [٤ ، ٠] =
 = [٤ ، ٠] - [٤ ، ٢]

② [١٤ ، ٠] \cap [٠ ، ١٤] =
 = [١٤ ، ٠] - [٠ ، ١٤]

المادة في الرياضيات



س = مجموعة العناصر الموجودة في س وغير الموجودة في ع

س = [١٤٨ - [-] ٣٤١]

س = [٣٤١]

س = مجموعة العناصر الموجودة في س وغير موجودة في ع

س = [١٤٨] - [٣٤١]

س = [١٤٨ - [-]

س = مجموعة عناصر س (وتعني مكمل المجموعة س)

س = ع - مجموعة عناصر س

س = [٣٤١] - [٤] - [١٤٨] \cup [٣٤٢]

اكتب ما يأتي على صورة فترة مع التوضيح بالرسم على خط الأعداد :

① [٣٤٠ ، ١] \cap [٣٤١ ، ١]



الحل

① [٣٤١] = [٣٤٠ ، ١] \cap [٣٤١ ، ١]

② [٣٤١] = [١٤٨] - [٣٤١]

اوجد مستعيناً بخط الأعداد [٥٤٢] - [٥٤١]



الحل

[٥٤٢] = [٥٤١] - [٥٤٢]

لاحظ أن :

العدد ٥ ينتمي للفترة والمجموعة (التقاطع يختلف عند إيجاد الفرق بين مجموعتين)

٦ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ :

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| ① [١٤٨] \exists ٢ - | ⑦ [٣٤٢] \exists ٣ |
| ② [٣٤٢] \exists ٤ | ⑧ [٣٤٢] = [٣٤٢] \cup [٣٤٢] |
| ③ [١] = [٥٤١] \cap [٥٤١] | ⑨ [٣٤٢] = [٣٤٢] - [٣٤٢] |
| ④ [٣٤٢] = [٣٤٢] - [٣٤٢] | ⑩ [٣٤٢] \exists ٥ |
| ⑤ [٣٤٢] = [٣٤٢] - [٣٤٢] | |
| ⑥ [٣٤٢] = [٣٤٢] - [٣٤٢] | |





ثانياً: اكتب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢) عرّف عن مجموعات الأعداد الآتية على صورة فترة ومثلها على خط الأعداد:

١) $\{x: x \geq 1, x \leq 2\}$

٢) $\{x: x \geq 1, x \leq 7\}$

٣) $\{x: x \geq 1, x \leq 5\}$

٤) $\{x: x \geq 1, x \leq 8\}$

٥) $\{x: x \geq 1, x \leq 1\}$

٦) مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

٧) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

٣) مثل كلاً من الفترات الآتية على خط الأعداد وعرّف عنها رمزياً بطريقة الصفة المميزة:

١) $[1, 6]$

٢) $[2, 3]$

٣) $[0, 5]$

٤) $[3, 10]$

٥) $[0, \infty)$

٦) $[2, 5]$

٧) $[1, 4]$

٨) $[0, 1]$

٩) $[0, 5]$

١٠) $[0, 5]$

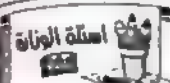
٥) إذا كانت $[1, 4] = A$ ، $[2, 3] = B$ ، فأوجد:

١) $A \cup B$

٢) $A \cap B$

٣) $A - B$

٤) $B - A$



على الفترات

تعاوني (٤)

ساعة استراحة ومراجعة

اختبار تراكمي (٢)

أولاً: راجع معنا واكتب نفسك

١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

١) العدد غير النسبي المحصور بين ٤، ٣ هو $\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$

٢) أقرب عدد صحيح للعدد $|\sqrt{36} - \sqrt{25}|$ هو ٣ ٤ ٥ ٦

٣) معادلة $x^2 + 9 = 0$ هي $\{9, -9\}$ $\{3, -3\}$ $\{9, 0\}$ $\{0, -9\}$

٤) معادلة $\frac{1}{x} + 1 = 7$ هي $\{ \dots \}$ $\{2, -2\}$ $\{4, -4\}$ $\{0, -4\}$

٥) $[1, 4]$ $[2, 3]$ $[0, 5]$ $[3, 10]$

(ب) حدد النقطة التي تمثل العدد $5\sqrt{2} - 3$ على خط الأعداد

.....

.....

.....

.....

.....

(ج) أوجد عددين نسبين يتحصر بينهما العدد $3\sqrt{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



- ٦ إذا كانت $\sim = [2, \infty[$ ، $\sim = [2, \infty[$ فاوجد :
 ١ $\sim \cup \sim$
 ٢ $\sim \cap \sim$
 ٣ $\sim - \sim$
 ٤ $\sim - \sim$
 ٥ \sim

مسائل المستوى الثاني

- ٧ أوجد شكلا مما يأتي على صورة فترة مستعينا بخط الأعداد :
 ١ $\sim \cup [3, 2[$
 ٢ $[2, 1[\cap] \infty, 1[$
 ٣ $\sim \cup [1, \infty[$
 ٤ $[2, \infty[\cap] \infty, 0[$
 ٥ $\sim \cup [2, 1[$
 ٦ $[1, 2[\cap] 3, \infty[$
 ٧ $[3, \infty[- [2, \infty[$
 ٨ $[2, \infty[- [2, \infty[$
 ٩ $[1, \infty[- [2, \infty[$

- ٨ أوجد شكلا مما يأتي على صورة فترة مستعينا بخط الأعداد :
 ١ $[5, 3[\cap [8, 4[$
 ٢ $[6, 4[\cup] 5, 2[$
 ٣ $[4, 1[\cap] 7, 3[$
 ٤ $[3, 1[- [6, 2[$
 ٥ $[5, 2[\cup] 3, 1[$
 ٦ $[2, 1[\cap [4, 2[$
 ٧ $[5, 1[- [3, 2[$
 ٨ $[3, 1[\cup [7, 2[$
 ٩ $[4, 2[\cap [6, 1[$

أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

- ١ $\{3, 2\} \cup \{3, 2\}$
 ٢ $\{3, 2\} \cap \{3, 2\}$
 ٣ $\{3, 2\} \cup \{3, 2\}$
 ٤ $\{3, 2\} \cap \{3, 2\}$
 ٥ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$
 ٦ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$
 ٧ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$
 ٨ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$
 ٩ $\{3, 2\} \cup \{3, 2\}$
 ١٠ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$
 ١١ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$
 ١٢ $\{3, 2\} \cap \{3, 2\}$
 ١٣ $\{3, 2\} - \{3, 2\}$



أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

- ١٠ إذا كانت $\sim \supseteq [25, 1[$ فإن $\sim \supseteq \dots$
 ١ $\sim - \sim = \dots$
 ٢ $\sim \cap [1, 3[= \dots$
 ٣ $\sim - [3, 1[= \dots$
 ٤ $\sim - [= \dots$
 ٥ $\sim \cap [3, 3[= \dots$

- ١١ إذا كانت $\sim = [7, 2[$ ، $\sim = [6, 4[$ فاوجد باستخدام الفترات :
 ١ $\sim \cap \sim$
 ٢ $\sim \cup \sim$
 ٣ $\sim - \sim$
 ٤ $\sim - \sim$

- ١٢ إذا كانت $\sim = [1, 3[$ ، $\sim = [2, 1[$ فاوجد :
 ١ $\sim \cup \sim$
 ٢ $\sim \cap \sim$
 ٣ $\sim - \sim$
 ٤ $\sim - \sim$
 ٥ \sim
 ٦ \sim

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

- ١ $[2, 2[- [3, 1[$ د $[3, 1[$ د $[2, 3[$ د ϕ
 ٢ $[3, 1[\cap] 5, 3[$ د $[3, 1[$ د $[3, 1[$ د $[3, 1[$
 ٣ $[5, 1[- [5, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$
 ٤ $[3, 2[- [3, 2[$ د $[3, 2[$ د $[3, 2[$ د $[3, 2[$
 ٥ $[2, 1[\cap] 2, 1[$ د $[2, 1[$ د $[2, 1[$ د $[2, 1[$
 ٦ $[5, 1[\cap [4, 5[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$
 ٧ $[4, 1[\cap [4, 1[$ د $[4, 1[$ د $[4, 1[$ د $[4, 1[$
 ٨ $[5, 1[\cup [1, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$
 ٩ $[5, 1[\cap [1, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$ د $[5, 1[$



④ ~ ③ ~ ② ~ ① ~

مسائل المتفوقين

فأوجد $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ من $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ، $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

(3) إذا كانت $[-\infty, -1) \cup (1, \infty]$ فإن $[-1, 1] = [-1, 3] \cap [-3, 1]$ فلو وجد قيمة x

④ إذا كانت $s^2 > s$ فإن $s \in \mathcal{O}$ أو مما ياتي :

[1960] 4 [1960] 4 [1960] 4 [1960] 4 [1960] 4

١٦ اكمل ما يأتي:

① إذا كانت $s \in [3, 0]$ فإن $s^2 \in \dots$

② إذا كانت $s \in [-2, 3]$ فإن $s^2 \in \dots$

③ إذا كانت \sqrt{a} فإن \sqrt{a} \sqrt{a}

④ إذا كانت $s \in [0, 1]$ فإن $\sqrt{s} \in [0, 1]$ \Rightarrow

⑤ إذا كانت $s^2 \ni [4, 0]$ فإن $s^2 \ni$

⑥ إذا كانت $s^2 \in [1, 9]$ فإن $s \in [1, 3]$

موقع الماهر في الرياضيات www.elmaher.org

9 يحتوي على امتحانات اضافية من السنوات السابقة مع كثير من الموضوعات

[illegible]



العمليات على الأعداد الحقيقية

يمكن إجراء بعض العمليات على الأعداد الحقيقية كالجمع والضرب ،
ولإجراء هذه العمليات يجب أن نتعرف على خواص هذه العمليات

أولاً : خواص جمع الأعداد الحقيقية

لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$ يمكن إدراك خواص عملية الجمع الآتية :

① الإغلاق : مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي أي أن $a + b \in \mathbb{R}$

فمثلاً $6 = 4 + 2$ ، $5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 0$ ، $6 \in \mathbb{R}$

② الأبدال : لكل عددين حقيقيين a, b يكون $a + b = b + a$

فمثلاً $6 = 2 + 4 = 4 + 2$ ، $5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 0 = 0 + 5\sqrt{2}$ ، $5 = 2 + 3 = 3 + 2$

③ الجمع : $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

فمثلاً $12 = 9 + 3 = (4 + 5) + 3$ ، $12 = 4 + 8 = 4 + (5 + 3)$

أي أن $12 = 4 + 5 + 3 = (4 + 5) + 3 = 4 + (5 + 3)$

④ المحايد الجمعي : الصفر هو العنصر المحايد الجمعي لأن $a + 0 = 0 + a = a$

فمثلاً $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0$ ، $3 = 0 + 3$

⑤ المعكوس الجمعي : لكل عدد حقيقي a يوجد معكوس جمعي هو $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$ (صفر (المحايد الجمعي))

فمثلاً 3 معكوسه الجمعي -3 ، $5\sqrt{2}$ معكوسه الجمعي $(-5\sqrt{2})$

حيث $3 + (-3) = 0$ ، صفر ، $5\sqrt{2} + (-5\sqrt{2}) = 0$ ، صفر



لاحظ أن : المعكوس الجمعي للعدد صفر هو نفسه

حيث أن كل عدد حقيقي له معكوس جمعي فإن عملية الطرح ممكنة دائماً في \mathbb{R}
حيث $a - b = a + (-b)$ أي أن عملية الطرح $a - b$ تعني جمع العدد a
مع المعكوس الجمعي للعدد b أي أن عملية الطرح مغلقة ولكنها ليست إبدائية
وليس دمجية ولا يوجد لها عنصر محايد أو معكوس

ثانياً : خواص ضرب الأعداد الحقيقية

لكل $a, b, c \in \mathbb{R}$ يمكن إدراك خواص الضرب الآتية :

① الإغلاق : حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي

فمثلاً $6 = 3 \times 2$ ، $3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times 1$ ، $6 \in \mathbb{R}$ ، $3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times 1$ ، $3\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

② الأبدال : لكل عددين حقيقيين a, b يكون $a \times b = b \times a$

فمثلاً $6 = 3 \times 2 = 2 \times 3$ ، $10 = 5 \times 2 = 2 \times 5$ ، $3\sqrt{2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times 2$ ، $10 = 3 \times 5 = 5 \times 3$

③ الجمع : $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

فمثلاً $3\sqrt{2} \times 8 = 4 \times 3\sqrt{2} \times 2 = 4 \times (3\sqrt{2} \times 2)$

$3\sqrt{2} \times 8 = 3\sqrt{2} \times 4 \times 2 = (4 \times 3\sqrt{2}) \times 2$

أي أن $3\sqrt{2} \times 8 = (4 \times 3\sqrt{2}) \times 2 = 4 \times (3\sqrt{2} \times 2)$

④ المحايد الضربي : الواحد هو العنصر المحايد الضربي لأن $a \times 1 = 1 \times a = a$

فمثلاً $\sqrt{2} = \sqrt{2} \times 1 = 1 \times \sqrt{2}$ ، $6 = 6 \times 1 = 1 \times 6$

⑤ المعكوس الضربي : لكل عدد حقيقي $a \neq 0$ يوجد معكوس ضربي هو $\frac{1}{a}$ بحيث $a \times \frac{1}{a} = 1$ (المحايد الضربي)

فمثلاً $1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$ حيث $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ هو $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (المعكوس الضربي للعدد $3\sqrt{2}$)

فمثلاً المعكوس الضربي للعدد $3\sqrt{2}$ هو $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ حيث $1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$



لاحظ أن: المعكوس الضربي للعدد 1 هو 1 والمعكوس الضربي للعدد -1 هو -1
(لأن $\frac{1}{1}$ ليس لها معنى)
ولا يوجد معكوس ضربي للعدد صفر

حيث أن لكل عدد حقيقي لا يساوي الصفر له معكوس ضربي فإن عملية القسمة على أي عدد خلاف الصفر ممكنة دائماً في \mathbb{C} حيث أن $a \neq 0$ ، $\frac{1}{a} \times a = a \div a = 1$ أي أن عملية القسمة $a \div b$ تعني ضرب العدد a في المعكوس الضربي للعدد b أي أن عملية القسمة مفككة ولكنها ليست أبدالية وليست دمجية ولا يوجد لها عنصر محايد أو معكوس

تذكر قاعدة فك الأقواس

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن:

$$\begin{aligned} 1 &= (1-) - (-) & 2 &= (b-) + (-) \\ 3 &= (1-)(1-) & 4 &= (b-)(b-) \end{aligned}$$

أمثلة توضيحية

أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 & \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad 3 \quad (4 + 3\sqrt{2}) \sqrt{2} \\ 4 & \quad \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}\right) 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 1 & \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ 2 & \quad 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8 \\ 3 & \quad (4 + 3\sqrt{2}) \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 3 \times 2 = 4\sqrt{2} + 6 \\ 4 & \quad \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}\right) 5\sqrt{2} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \times 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 1 + 5 \times 2 \times 2 = 1 + 20 = 21 \end{aligned}$$



أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 & \quad (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \quad 2 \quad (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \quad 3 \quad (1 - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 1 & \quad (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2 \times 2 + 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 2 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} \\ 2 & \quad (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2 \times 2 - 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 1 \\ 3 & \quad (1 - \sqrt{3})^2 = 1 \times 1 - 1 \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times 1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 & \quad [(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})] = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) \\ 2 & \quad 4 = (2)^2 = (1 - 3) = -1 \end{aligned}$$



اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

$$\begin{aligned} 1 & \quad \frac{3}{\sqrt{3}} \quad 2 & \quad \frac{20}{5\sqrt{2}} \quad 3 & \quad \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} 1 & \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \\ 2 & \quad \frac{20}{5\sqrt{2}} = \frac{20}{5 \times 2} = \frac{20}{10} = 2 \\ 3 & \quad 1 - \sqrt{2} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - 2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$



اعط تقديرًا لناتج $(\sqrt{5} + 3) \times (\sqrt{5} + 1)$ وتطقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة:

الحل

تقدير $\sqrt{5}$ هو ٢ $\therefore (\sqrt{5} + 3)$ تقديرها هو $5 = 2 + 3$

تقدير $\sqrt{5}$ هو ٣ $\therefore (\sqrt{5} + 1)$ تقديرها هو $4 = 3 + 1$

$\therefore (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 1)$ تقديرها هو $20 = 4 \times 5$

باستخدام الآلة الحاسبة للتحقق من صحة الإجابة نجد أن الناتج 20.459 أي أن التقدير مقبول



تدريب (١)

أكمل لإيجاد ناتج ما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{3} + \sqrt{3} \quad \textcircled{2} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \quad \textcircled{4} \quad \dots\dots\dots = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$\textcircled{5} \quad \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = 1 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2}$$

تدريب (٢)

أوجد مفكوك كل مما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{2} + \dots\dots\dots = (\sqrt{2} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

$$\textcircled{2} \quad \dots\dots\dots + 2 = (2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

$$\textcircled{3} \quad \dots\dots\dots = (\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

$$\textcircled{4} \quad 12 - \dots\dots\dots = 12 - (2 + \sqrt{2})$$



على العمليات على الأعداد الحقيقية

تمارين (٥)

ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختر نفسك

تدريب (٣)

١) إذا كانت $5 - [\dots] = 16$ ، $6 - [\dots] = 3$ ، فأكمل ما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad \dots\dots\dots = 5 - 11 \quad \textcircled{2} \quad \dots\dots\dots = 5 - 11$$

$$\textcircled{3} \quad \dots\dots\dots = 5 - 5 \quad \textcircled{4} \quad \dots\dots\dots = 5 - 5$$

ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $2(1 - 3) - 14 = 5$ في \mathbb{Z}

٦) اكتب أن $\sqrt{3}$ ينحصر بين ١,٧ و ١,٨

درجات

هـ) ١) حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2} + 1$ على خط الأعداد

٢) أوجد على صورة فترة مستعينة بخط الأعداد $361 - [\dots] - [\dots]$

درجات

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي:

$$\dots\dots\dots = (11\sqrt{2}) + 11\sqrt{2} \quad (٢)$$

$$\dots\dots\dots + 5 = 5 + 2\sqrt{2} \quad (١)$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \quad (٤) \quad (\dots\dots\dots + \dots\dots) + 5 = 3\sqrt{2} + 7 \quad (٣)$$

$$\dots\dots\dots = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \quad (١) \quad \dots\dots\dots = 3 - 5\sqrt{2} + 7 \quad (٥)$$

$$\dots\dots\dots = 2\sqrt{2} \times \dots\dots\dots = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad (٨) \quad \dots\dots\dots = (\sqrt{2} - 3) + (\sqrt{2} + 4) \quad (٧)$$

$$\dots\dots\dots \text{ هو } \sqrt{2} \text{ المعكوس الجمعي للعدد } 8\sqrt{2} \quad (٩)$$

$$\dots\dots\dots \text{ هو } 2\sqrt{2} - 1 \text{ المعكوس الجمعي للعدد } 1 \quad (١٠)$$

$$\dots\dots\dots \text{ هو } 2 \text{ المحاكيد الضربي في } 2 \quad (١١)$$

$$\dots\dots\dots \text{ هو } \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ المعكوس الضربي للعدد } \frac{2}{\sqrt{2}} \quad (١٢)$$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

$$[3\sqrt{5} \text{ و } 3\sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{5} \text{ و } 3\sqrt{2}] \dots\dots\dots = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \quad (١)$$

$$[5\sqrt{5} \text{ و } 5\sqrt{2} \text{ و } 5 \text{ و } 5\sqrt{2}] \dots\dots\dots = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \quad (٢)$$

$$\dots\dots\dots = 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 5 \quad (٣)$$

$$[2\sqrt{2} + 1 \text{ و } 2\sqrt{2} + 1 \text{ و } 2\sqrt{2} + 1 \text{ و } 1]$$

$$[2 \text{ و } 3\sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{2} - 4 \text{ و } 1] \dots\dots\dots = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - 4 \quad (٤)$$

$$\dots\dots\dots = \frac{2}{3\sqrt{2}} \quad (٥)$$

$$[3\sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{2} \text{ و } 2 \text{ و } 2\sqrt{2}]$$

$$\dots\dots\dots = 2(5\sqrt{2}) \quad (٦)$$

$$[5\sqrt{2} \text{ و } 5 \text{ و } 2 \text{ و } 2\sqrt{2}]$$

٧ المعكوس الجمعي للعدد $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$ هو

$$[3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 4 \text{ و } 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \text{ و } 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}]$$

$$[4 \text{ و } 5 \text{ و } 3 \text{ و } 5\sqrt{2}] \dots\dots\dots = 5\sqrt{2} \div (5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) \quad (٨)$$

٤ ضم كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \quad (٢)$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad (١)$$

$$5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \quad (٤)$$

$$7\sqrt{5} - 7\sqrt{2} \quad (٣)$$

$$5\sqrt{2} - 5\sqrt{5} + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \quad (٦)$$

$$3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \quad (٥)$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad (٨)$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad (٧)$$

مسائل المستوى الثاني

٥ ضم كل مما يأتي في أبسط صورة:

$$7\sqrt{5} + 7\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \quad (٢)$$

$$2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 3 \quad (١)$$

$$2\sqrt{2} + (7\sqrt{2} -) - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} \quad (٤)$$

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \quad (٣)$$

$$2\sqrt{2} + \frac{2}{5} + 2\sqrt{2} + \frac{2}{5} \quad (٦)$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad (٥)$$

٦ ضم كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$3\sqrt{2} \times 4 \quad (٢)$$

$$5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \quad (١)$$

$$7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} \quad (٤)$$

$$2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad (٣)$$

$$2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad (٦)$$

$$(5\sqrt{2} -) \times 5\sqrt{2} \quad (٥)$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \quad (٨)$$

$$3 + 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad (٧)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} \times \frac{7\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{2} \quad (١٠)$$

$$2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad (٩)$$

١١ أعط تقديراً لنتائج $(\sqrt{8} + 1) \times (\sqrt{5} + 3)$ و تحقق من صحة اجابتك

باستخدام الآلة الحاسبة

١٢ إذا كانت $\sqrt{15} = س$ ، $٢ + \sqrt{15} = ص$ ، $\sqrt{25} - ٤ = ق$ قدر قيمة كل من :

١) س ، ص ٢) س × ص ٣) س + ص

المختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة

وأوجد الفرق بين تقديرك والإجابة الصحيحة



مسائل المتفوقين

١٣ إذا كان $\sqrt[3]{٢ - ٣\sqrt{٢}} = س - ٣\sqrt{٢}$ فأوجد قيمة س

[$٢ = ١,٤٢ = ١$]

١٤ إذا كان $س = ١$ فإن $(\frac{1}{س} + س) (\frac{1}{س} - س)$ يساوي أيّاً مما يأتي :

[٢ س ، ٢ ص ، ٢ س - ص ، ٢ ص - س]

المهارة في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية وجميع المراحل

يحتوي على شرح كامل بالتفصيل يساعد ولي الأمر على الفهم ويساعد المعلم على الشرح ويساعد الطالب على التدريب



٧ ضم كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

- ١) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٢) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٣) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٤) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٥) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٦) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٧) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٨) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ٩) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٠) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١١) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٢) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٣) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٤) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٥) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٦) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٧) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$
- ١٨) $(\sqrt{2} + ٥) \sqrt{2}$

٨ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً موجباً :

- ١) $\frac{٢}{\sqrt{2}}$
- ٢) $\frac{٣}{\sqrt{2}}$
- ٣) $\frac{٤}{\sqrt{2}}$
- ٤) $\frac{٥}{\sqrt{2}}$
- ٥) $\frac{٦}{\sqrt{2}}$
- ٦) $\frac{٧}{\sqrt{2}}$

٩ إذا كانت $\sqrt{2} = س$ ، $\sqrt{3} = ص$ ، $\sqrt{4} = ق$ فأوجد قيمة كل من :

- ١) $س + ص$
- ٢) $س - ص$
- ٣) $س \times ص$

١٠ إذا كانت $\sqrt{2} = س$ ، $\sqrt{3} = ص$ ، $\sqrt{4} = ق$ فأوجد قيمة كل من :

- ١) $س + ص$
- ٢) $س - ص$
- ٣) $س \times ص$
- ٤) $س + ص$
- ٥) $س - ص$
- ٦) $س \times ص$

العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان a ، b عددين حقيقيين غير سالبين فإن:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad (1)$$

فمثلاً:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{4} = \sqrt{5 \times 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{9} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{a \times 1} = \sqrt{a} \times \sqrt{1} \quad (2)$$

فمثلاً:

$$\sqrt{4} = \sqrt{4 \times 1} = \sqrt{4} \times \sqrt{1} = 2$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{16 \times 1} = \sqrt{16} \times \sqrt{1} = 4$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad (3)$$

فمثلاً:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \times b}}{b} \quad (4)$$

فمثلاً:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{4}}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

وتستخدم هذه القاعدة لجعل المقام عدداً نسبياً

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \times b}}{b} \quad (5)$$

فمثلاً:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{4}}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ملاحظة:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \quad ; \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

العددان المترافقان

إذا كان a ، b عددين نسبیین موجبيين:

فإن كل من العددين $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ ، $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ يعتبر مرافقاً للعدد الآخر وهما يختلفان في الإشارة بينهما وحاصل ضربهما دائماً عدد نسبي

أمثلة توضيحية

المختصر المقدار $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{50}$ بعد وضع كل حد من حدوده على صورة $\sqrt{2}$

الحل

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 50} = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore \sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{50} = \sqrt{2} - 4 + 10 = \sqrt{2} + 6$$

$$\sqrt{2} + 6$$

المختصر المقدار $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{5}{\sqrt{8}}$

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3 \times \sqrt{4}}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5 \times \sqrt{8}}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} = \frac{5 \times 2\sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

المختصر لأبسط صورة $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$



الحل:

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

أوجد ناتج:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \sqrt{2} \quad (1) \\ & (\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (2) \\ & (\sqrt{2} - \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (3) \\ & (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (4) \end{aligned}$$



الحل:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \sqrt{2} \quad (2)$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (3)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{2}) (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (4)$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

اكتب شكلاً مما يأتي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

الحل:

$$\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} =$$

$$\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1} =$$

إذا كانت $\sqrt{2} + \sqrt{2} =$ فاوجد قيمة $\frac{1}{\sqrt{2}}$



الحل:

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} =$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Handwritten text at the top of the right page, possibly a title or header.

Handwritten text in the upper middle section of the right page, including a small diagram or illustration.

Handwritten text in the lower middle section of the right page.

Handwritten text at the bottom of the right page.

Handwritten text at the top of the left page.

Handwritten text in the upper middle section of the left page.

Handwritten text in the lower middle section of the left page.

Handwritten text in the lower middle section of the left page.

Handwritten text at the bottom of the left page.

Handwritten text on the far left of the left page.

Handwritten text in the lower middle section of the left page.

Handwritten text in the lower middle section of the left page.

Handwritten text at the bottom of the left page.



$$2(\sqrt{2} + 3) \textcircled{5}$$

$$2(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \textcircled{6}$$

$$(4 + 3\sqrt{2})(3 - 3\sqrt{2}) \textcircled{7}$$

$$2(\sqrt{2} + \sqrt{2})2(\sqrt{2} - \sqrt{2}) \textcircled{8}$$

$$(18\sqrt{2} + 12\sqrt{2})(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) \textcircled{9} \quad (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})3\sqrt{2} \textcircled{10}$$

٨ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \textcircled{1}$$

$$\frac{0}{3\sqrt{2}} \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \textcircled{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \textcircled{5}$$

$$\frac{0}{5\sqrt{2}} \textcircled{6}$$

$$\frac{4}{2\sqrt{2}} \textcircled{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \textcircled{8}$$

٩ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً:

$$\frac{4}{5\sqrt{2} - \sqrt{2}} \textcircled{1}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}} \textcircled{2}$$

$$\frac{4}{5\sqrt{2} - 3} \textcircled{3}$$

$$\frac{2}{1 + 3\sqrt{2}} \textcircled{4}$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \textcircled{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} \textcircled{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} \textcircled{7}$$

$$\frac{0}{5\sqrt{2}} + 3 \textcircled{8}$$

١٠ أوجد قيمة كلاً من س + ص ، س - ص في الحالات الآتية:

$$\textcircled{1} \quad 5\sqrt{2} - 1 = \text{ص} , \quad 5\sqrt{2} + 3 = \text{س}$$

$$\textcircled{2} \quad 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \text{ص} , \quad 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \text{س}$$

$$\textcircled{3} \quad 2\sqrt{2} + 0 = \text{ص} , \quad 2\sqrt{2} - 0 = \text{س}$$

$$\textcircled{11} \quad \text{إذا كان } 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 1 , \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \text{ص}$$

$$\text{فاوجد قيمة كلاً من } 1 + \text{ص} , \quad 1 - \text{ص}$$

$$[3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}]$$

$$\textcircled{12} \quad \text{إذا كان } 1 - 3\sqrt{2} = \text{ص} , \quad 1 + 3\sqrt{2} = \text{س}$$

$$\text{فاوجد قيمة كلاً من } \text{ص} \cdot \text{س} , \quad \text{س} - \text{ص}$$

$$[1 - 3\sqrt{2}]$$



مسائل المستوى الثاني

٦ اختصر لأبسط صورة:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4 + 8\sqrt{2}} - \sqrt{2} \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{125\sqrt{2}} + \frac{2}{5}\sqrt{2} \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{0} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 45\sqrt{2} \textcircled{3}$$

$$54\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2} - \sqrt{2} \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - 18\sqrt{2}} + 32\sqrt{2} \textcircled{5}$$

$$98\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \textcircled{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9 - 12\sqrt{2}} + 75\sqrt{2} \textcircled{7}$$

$$99\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2} \textcircled{8}$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{4} - \sqrt{2} \cdot 3 - 5\sqrt{2} \textcircled{9}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \textcircled{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{14} + \sqrt{2} \cdot 2 - 28\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \textcircled{11}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{8} - \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{12} \textcircled{12}$$

٧ أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\textcircled{1} \quad (5\sqrt{2} + 3\sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$\left(7 + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \quad (\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

$$\textcircled{4} \quad (2 - 5\sqrt{2})(2 + 5\sqrt{2})$$



الوقت / حل التمرين المرفوعة

(٢٢) إذا كان $س = ٥\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٥}$ ، $ص = ٥\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٥}$

أوجد قيمة كل من $س - ص$ ، $س$ ، $ص$

[٢٠٤، ٥٧٩]

(٢٣) إذا كان $س = ٣ + ٥\sqrt{٣}$ ، $ص = \frac{٤}{س}$ اثبت ان $س$ ، $ص$ مترافقان

ثم اوجد $س + ٦$

(٢٢)

(٢٤) إذا كانت $س = ١١\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٣}$ ، $ص = ١١\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٣}$

اثبت ان $\frac{س - ص}{٥\sqrt{٣}} = \frac{١}{٣}$

(٢٥) إذا كانت $س = ٣ + \sqrt{٣}$ ، $ص = ٣ - \sqrt{٣}$ اوجد قيمة $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س}$

(١٤)

(٢٦) إذا كانت $س = \frac{٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥}}{٥\sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥}}$

أوجد قيمة كل من : ① $س + ٢$ ، ② $س$

اثبت ان $س + ٢ = ٣٨$

[١٠٤، ٢٨]

(٢٧) إذا كانت $س = \frac{٢}{٥\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٧}}$ ، $ص = \frac{١}{٥\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٧}}$

اثبت ان $س$ ، $ص$ مترافقان ثم اوجد قيمة $(س + ص) - س^٢ - ص^٢$

[٢١]



مسائل المتفوقين

(٢٨) أوجد مرافق العدد $٨\sqrt{٧} + ١٨\sqrt{٧} - ٥٠\sqrt{٧}$

[٦٧٢، ٢]

(٢٩) اعمل مقام الكسر $\frac{٢ + ٣\sqrt{٧} + \sqrt{٧}}{٢ - ٣\sqrt{٧} + \sqrt{٧}}$ عدداً نسبياً

[٢٧٢، ٢٧٢]

لا تفرح في المثلثات



(١٣) إذا كان $س = ٢ + ٣\sqrt{٣}$ ، $ص = ٢ - ٣\sqrt{٣}$ اوجد قيمة $\frac{س + ص}{س - ص}$

(١١)

(١٤) إذا كان $س = ٢ - ٣\sqrt{٣}$ ، $ص = ٢ + ٣\sqrt{٣}$ اثبت ان $س + ص = (س - ص)^٢$

(١٥) إذا كان $س = \frac{٢}{٣\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٧}}$ ، $ص = \frac{٢}{٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٧}}$

[٢٥٧، ١١]

اوجد قيمة كل من $س^٢ - ص^٢$ ، $س - ص$

(١٦) إذا كان $س = ٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥}$ ، $ص = ٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٥}$ اوجد قيمة $\frac{س + ص}{س - ص}$

[٢٧]

(١٧) إذا كان $س = ٣ + \sqrt{٣}$ ، $ص = ٣ - \sqrt{٣}$

اثبت ان $س$ ، $ص$ معكوسين ضربياً للأخر

(١٨) إذا كانت $س = ٧\sqrt{٧} + ٥\sqrt{٣}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$ اوجد في أبسط صورة قيمة $\frac{س + ص}{س - ص}$

[٢٧]

(١٩) إذا كانت $س = ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٥}$ ، $ص = ٣\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥}$

[٢٧]

① اوجد قيمة $\frac{س + ص}{س - ص}$

[٢٧]

② اوجد قيمة $س^٢ + ٢ + ص + ص^٢$

(٢٠) إذا كانت $س = \frac{٤}{٣\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٧}}$ ، $ص = \frac{٤}{٣\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٧}}$

[٢٧، ٢١]

أوجد قيمة كل من : ① $س - ص$ ، ② $\frac{س - ص}{س + ص}$

(٢١) إذا كانت $س = \frac{١}{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٥}}$ ، $ص = ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٥}$

[٢٧، ٢١]

أوجد قيمة كل من : ① $س - ص$ ، ② $(س - ص)^٢$

العمليات على الجذور التكعيبية

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b} \quad (1)$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{8} &= \sqrt[3]{5 \times 8} = \sqrt[3]{40} \\ \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{27} &= \sqrt[3]{2 \times 27} = \sqrt[3]{54} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \quad (2)$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{40} &= \sqrt[3]{2 \times 20} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{20} \\ 2 &= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (3) \quad a \neq 0, b \neq 0$$

فمثلاً:

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (4) \quad a \neq 0, b \neq 0$$

فمثلاً:

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$$

لاحظان:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a \times b}}{\sqrt[3]{b}}$$

فمثلاً:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1 \times 8}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

أمثلة توضيحية

1- ضم كلاً مما يأتي على صورة $\sqrt[3]{a}$ حيث a, b عدنان صحيحان
 a, b أصغر قيمة موجبة ممكنة

$$\sqrt[3]{1710} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{250} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{16} \quad (3)$$

الحل

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \times 8} = \sqrt[3]{2 \times 2^3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2} \times 2 = 2\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \times 125} = \sqrt[3]{2 \times 5^3} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{2} \times 5 = 5\sqrt[3]{2} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{1710} = \sqrt[3]{5 \times 342} = \sqrt[3]{5 \times 2 \times 3^4} = \sqrt[3]{5 \times 2 \times 3^3 \times 3} = \sqrt[3]{150 \times 3} = \sqrt[3]{150} \times \sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{18} \quad (3)$$

2- اختصر لأبسط صورة المقدار $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{192} \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} \sqrt[3]{5}$

الحل

$$\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{192} \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \times 125} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3 \times 64} \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3 \times 8} \sqrt[3]{5} =$$

$$\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{5} =$$

$$\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{40} =$$

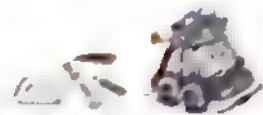
3- اختصر لأبسط صورة المقدار $\sqrt[3]{(3-\sqrt[3]{2})} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{2}$

الحل

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{9 \times 8} =$$

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{9} \sqrt[3]{2} =$$

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{9} \sqrt[3]{2} =$$



1 اختصر لأبسط صورة التقار



في العمل

$$\begin{aligned} \text{التقار} &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= (\sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}) + (\sqrt{2 \times 9} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}) \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{أو بد نتج} (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (2 - 3) = -1$$



في العمل

$$\begin{aligned} \text{التقار} &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \end{aligned}$$

أسئلة للتدريب

تدريب (١)

اختصر ما يأتي لأبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 & \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \\ &= \sqrt{8 \times \frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times 9} \end{aligned}$$



١٧) على العمليات على الجذور التكعيبية



١ ساعة امتحان ومراجعة



أولاً: راجع معنا واختر نفسك



١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

- ١) إذا كانت $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ وكان $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ فإن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
[١ د ٢ د ٣ د ٤ د]
- ٢) $[5\sqrt{2}] - [3\sqrt{2}] =$
[[٢٤١] د [٢٤١] د [٥٤٣] د [٥٤٣] د]
- ٣) العدد الثاني في النمط $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}$ هو
[$\sqrt{9}$ د $\sqrt{6}$ د $\sqrt{15}$ د $\sqrt{5}$ د]
- ٤) إذا كانت $\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ، فإن $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$
[$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ د ٢٠ د ١٢ د ٢ د]



(ب) إذا كانت $\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ، فإن $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$
.....
.....



(ج) إذا كان $\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ، فإن قيمة $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
.....
.....



ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

أكمل ما يأتي:

- = $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ ① = $8 - \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ ②
 = $\frac{4}{9}\sqrt{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{2}$ ③ = $2\sqrt{2} - 16\sqrt{2}$ ④
 = $2(\sqrt{2})$ ⑤ = $\frac{2\sqrt{2}}{8}\sqrt{2}$ ⑥
 = $128\sqrt{2} - 250\sqrt{2}$ ⑦ = $24\sqrt{2} - 125\sqrt{2}$ ⑧
 = $\frac{2}{9}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$ ⑨ = $\frac{4}{10}\sqrt{2} \times \frac{2}{5}\sqrt{2}$ ⑩
 = $\frac{5}{12}\sqrt{2} - 56\sqrt{2}\frac{1}{2}$ ⑪ = $100\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}\frac{1}{2}$ ⑫

③ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

- [3 د 3√ د 3√ د 5√] = $24\sqrt{2} - 81\sqrt{2}$ ①
 [0 د 5√ د 5√ د 175√] = $4\sqrt{2} + 135\sqrt{2}$ ②
 [3 د 27√ د 6 د 27√] = $9\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ ③
 [3 د 27√ د 3 د 3-] = $\frac{81 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ④

④ ضع كلاً مما يأتي على صورة $\sqrt{2}$ حيث أ ب عدنان صحيحان ، ب أصغر قيمة موجبة ممكنة

- ① $54\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $128\sqrt{2}$ ④ $2000 - \sqrt{2}$
 ⑤ $\frac{10}{16}\sqrt{2}$ ⑥ $3160 - \sqrt{2}$

⑤ اختصر لأبسط صورة:

- ① $54 - \sqrt{2} + 16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ ② $24\sqrt{2} + 81 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
 ③ $54\sqrt{2} - 128\sqrt{2} + 250\sqrt{2}$ ④ $192\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 81\sqrt{2}$

مسائل المستوى الثاني

⑥ أوجد في أبسط صورة:

- ① $2 - \sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$ [3√]
 ② $\frac{1}{9}\sqrt{2} - 24 - \sqrt{2} + 81\sqrt{2}$ [صفر]
 ③ $2(3 - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}\sqrt{2} - 243\sqrt{2}$ [3√]
 ④ $2(2 - \sqrt{2}) - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 256\sqrt{2}$ [2√]
 ⑤ $18\sqrt{2} - 2(2\sqrt{2}) - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 54 - \sqrt{2}$ [3√ - 3√]
 ⑥ $16 - \sqrt{2} + 28\sqrt{2} - \frac{14}{\sqrt{2}} + 54\sqrt{2}$ [3√]
 ⑦ $54\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 16\sqrt{2}\frac{1}{2} + 18\sqrt{2}$ [3√ -]
 ⑧ $2\sqrt{2} + 250\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} + 200\sqrt{2}\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$ [0]
 ⑨ $\frac{7}{18\sqrt{2}} + 98\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} - 24 - \sqrt{2} + 81\sqrt{2}$ [3√]
 ⑩ $16\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 54\sqrt{2} + 750\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 48\sqrt{2}$ [3√]
 ⑪ $32\sqrt{2} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$ [3]

⑦ إذا كانت $2\sqrt{2} = \text{مس}$ ، $3\sqrt{2} = \text{مس}$ فاوجد (مس ص 3) ⑦

[$\frac{1}{18}$]



تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

أولاً : الأشكال الهندسية المستوية :

هي الأشكال التي يتكون كل منها من مجموعة جزئية من نقاط مستوى ما
والتي يلي ملخصاً للقوانين الهامة الخاصة بمحيط ومساحة هذه الأشكال:

الشكل	القياس	الملاحظة
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2} \times$ طول القاعدة \times الارتفاع العمودي عليها
متوازي الأضلاع	مجموع أطوال أضلاعه	طول القاعدة \times الارتفاع العمودي عليها
المستطيل	(الطول \times العرض) $\times 2$	الطول \times العرض
المربع	طول الضلع $\times 4$	طول الضلع \times نفسه ؛ $\frac{1}{2} \times$ مربع طول قطره
المعين	طول الضلع $\times 4$	$\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب طولي القطريين
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه	طول القاعدة \times الارتفاع العمودي عليها
		$\frac{1}{2} \times$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيين \times الارتفاع

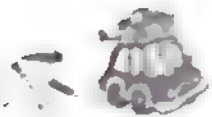
المثانة



محيط الدائرة = $2\pi r$ وحدة طول

مساحة النافذة = πr^2 وحدة مربعة

حيث π نصف قطر الدائرة ، π (النسبة التقريبية) $= \frac{22}{7}$ ما لم يذكر غير ذلك



✓ (A) $1 = (1 \times \sqrt{2}) + \sqrt{2} \times 0$ ✓

9. **اوجده فتح مکمل مما يأتي :**

(२-११), ११, ११

(1-7), 770

$$(\overline{r}_1 - \overline{r}_2) \otimes$$

[illegible]

$$[7] \quad (1 + \sqrt{-1}) + \sqrt{-1} = (1 - \sqrt{-1}) + \sqrt{-1} = 0$$

$$(1, \overline{1}, \overline{1}, 1) \quad (1, -\overline{1}, \overline{1}, 0)$$

(1) $(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}), (\overline{A} - \overline{B}) \textcircled{3}$

(१५.१६.१७॥ १८-१९)३

$$(w) \quad (1 + \sqrt{V_1 - \sqrt{V}})(1 + \sqrt{V}) \otimes$$

$$(1 + \sqrt{5})^2 - 5 = 4 \quad (2 + \sqrt{5})^2 - 5 = 9$$

$$[7] \quad \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} A + \sqrt{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \right) \sqrt{2} \sqrt{2} \quad (A)$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}) \sqrt{2} = 0$$

$$f_1 = -f_2 = (f_3 + f_4) \quad (4)$$

$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$

١٠) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$: $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

علاوة فية: ⑤ (س + ص) ④ (س - ص) ③ (س)

(۱۱) (۱) $\sqrt{3} + 2 = m$, $\sqrt{3} - 2 = n$ فاولد قیمة: $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

مستقبل التعليم

۱۶) اوپر دیے (سر + ۱۰) (سر - ۱)

ابن عبد الله بن مسعود

٢) إذا كان $(\lambda_1) = (\lambda_2) = \dots = (\lambda_n)$ فتأخذ فيسم من الممكنة

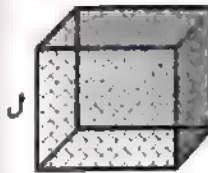


ثانياً : الأجسام أو المجسمات :

- الأجسام تتكون من مجموعة غير منتهية من النقاط وتشغل حيزاً من الفراغ
- أى جسم يقسم الفراغ إلى ثلاث مجموعات من النقاط :
(أ) مجموعة النقاط الواقعة داخل الجسم
(ب) مجموعة النقاط التى تحدد الجسم من الخارج وتسمى " ب سطح الجسم "
(ج) مجموعة النقاط الواقعة خارج الجسم
- واتحاد المجموعتين (أ) ، (ب) يكون ما يسمى " حجم الجسم "
- وحدة العجوم : هى حجم مكعب طول حرفه ١ سم ،
وتوجد مضاعفات لهذه الوحدة مثل الديسيمتر المكعب والمتر المكعب

(١) المكعب

هو جسم جميع أوجهه الستة مربعة الشكل ومتطابقة
وإذا كان طول حرف المكعب ل وحدة طول فإن :



- ① مساحة الوجه = $ل^2$ (وحدة مربعة)
- ② المساحة الجانبية = $ل^2 \times 4$ (وحدة مربعة)
- ③ المساحة الكلية (مساحة أوجه الستة) = $ل^2 \times 6$ (وحدة مربعة)
- ④ حجم المكعب = $ل^3$ (وحدة مكعبة)

(٢) متوازى المستطيلات

هو جسم جميع أوجهه الستة مستطيلات وكل وجهين متقابلين متطابقين
وإذا كانت أطوال أحرافه س ، ص ، ع وحدة طول فإن :



- ① المساحة الجانبية = محيط القاعدة \times الارتفاع
 $2 \times (س + ص) \times ع$ (وحدة مربعة)
- ② المساحة الكلية = المساحة الجانبية + $2 \times$ مساحة القاعدة
 $2 \times (س \times ص + ص \times ع + ع \times س)$ (وحدة مربعة)
- ③ حجمه = مساحة القاعدة \times الارتفاع
 $س \times ص \times ع$ (وحدة مكعبة)

(٣) الأسطوانة الدائرية القائمة

هى جسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرى
أما السطح الجانبى فهو سطح منحنى يسمى بالسطح الأسطوانى



- إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة نى وارتفاعها ع فإن :
- ① المساحة الجانبية للأسطوانة = $2\pi نى ع$ (وحدة مربعة)
 - ② المساحة الكلية للأسطوانة = $2\pi نى ع + 2\pi نى^2$ (وحدة مربعة)
 - ③ حجم الأسطوانة = $\pi نى^2 ع$ (وحدة مكعبة)

(٤) الكرة

هى جسم سطحه منحنى وجميع النقاط التى تنتمى إلى سطح الكرة
تكون على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة داخل الكرة تسمى مركز الكرة



- وإذا قطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع دائرة مركزها
هو مركز الكرة وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة
- ① مساحة سطح الكرة = $4\pi ر^2$ (وحدة مربعة)
 - ② حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi ر^3$ (وحدة مكعبة)

أمثلة توضيحية

① دائرة طول نصف قطرها ٣,٥ أوجد :

$$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$$

- ① محيط الدائرة ② مساحة الدائرة

الحل

$$① \text{ محيط الدائرة } = 2\pi ر = 2 \times \frac{22}{7} \times 3,5 = 22$$

$$② \text{ مساحة الدائرة } = \pi ر^2 = \frac{22}{7} \times 3,5^2 = 38,5$$



مثال ٥ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٨ سم ، طول قطر قاعدتها ١٤ سم أوجد :

$$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$$

٢ مساحتها الجانبية

١ حجمها

الحل

$$\therefore \text{نق } 14 = \text{نق } 7$$

$$\textcircled{1} \text{ حجم الأسطوانة } = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} = \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 8 = 1232 \text{ سم}^3$$

$$\textcircled{2} \text{ مساحتها الجانبية } = \pi \times \text{نق} \times \text{ع} = \frac{22}{7} \times 14 \times 8 = 352 \text{ سم}^2$$

مثال ٦ احسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة التي

$$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$$

حجمها ٧٧٠ سم^٣ وارتفاعها ٥ سم

الحل

$$\therefore \text{حجم الأسطوانة } = \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\therefore 770 = \frac{22}{7} \times \text{نق}^2 \times 5$$

$$\therefore \text{نق}^2 = \frac{7 \times 770}{5 \times 22} = 49 \quad \therefore \text{نق } 7 = \text{نق}$$

مثال ٧ أوجد مساحة الكرة التي طول نصف قطرها ١ سم بدلالة π

ملاحظة

بدلالة π تعنى أننا لا نعوض عن π

$$\text{مساحة الكرة } = \pi \times \text{نق}^2 \times 4 = \pi \times (1)^2 \times 4 = 4\pi \text{ سم}^2$$

$$(3,14 = \pi)$$

٨ إذا كان طول نصف قطر كرة ٣ سم فأوجد حجمها

الحل

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3,14 \times (3)^3 = 113,04 \text{ سم}^3$$



مثال ٢ دائرة مساحتها ٦١٦ سم^٢ أوجد محيطها

الحل

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi \times \text{نق}^2$$

$$\therefore 616 = \frac{22}{7} \times \text{نق}^2$$

$$\therefore \text{نق}^2 = \frac{7}{22} \times 616 = 196 \quad \therefore \text{نق } 14 = \text{نق}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = \pi \times \text{نق} \times 2 = \frac{22}{7} \times 14 \times 2 = 88 \text{ سم}$$

مثال ٣ مكعب حجمه ٨ سم^٣ احسب مساحة وجهه ومساحته الكلية

الحل

$$\text{نفرض أن طول حرف المكعب } = \text{نق}$$

$$\therefore \text{حجم المكعب} = \text{نق}^3$$

$$\therefore 8 = \text{نق}^3 \quad \therefore \text{نق } 2 = \text{نق}$$

$$\therefore \text{مساحة وجهه} = \text{نق}^2 = (2)^2 = 4 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الكلية للمكعب} = 6 \times \text{نق}^2$$

$$= 6 \times 4 = 24 \text{ سم}^2$$

مثال ٤ متوازي مستطيلات بعداً قاعدته ٥ سم ، وارتفاعه ١٠ سم أوجد :

٣ حجمه

٢ مساحته الكلية

١ مساحته الجانبية

الحل

$$\text{محيط القاعدة} = (\text{الطول} + \text{العرض}) \times 2 = (5 + 6) \times 2 = 22 \text{ سم}$$

$$\textcircled{1} \text{ المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 22 \times 10 = 220 \text{ سم}^2$$

$$\textcircled{2} \text{ المساحة الكلية} = 2 \times (5 \times 10 + 10 \times 6 + 5 \times 6)$$

$$= 2 \times (50 + 60 + 30) = 280 \text{ سم}^2$$

$$\textcircled{3} \text{ الحجم} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 5 \times 6 \times 10 = 300 \text{ سم}^3$$



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

مكعب طول حرفه ٣ أوجد:

- ① حجمه ② مساحته الكلية

الحل

① حجم المكعب = = = = $3^3 = 27$

② مساحته الكلية = = = = $6 \times 3^2 = 54$

تدريب (٢)

موازي مستطيلات بعدا قاعدته ٥، ٤، ٣ وارتفاعه ٣ أوجد:

- ① حجمه ② مساحته الجانبية ③ مساحته الكلية

الحل

① حجم موازي المستطيلات = الطول \times العرض \times الارتفاع = = = = $3 \times 4 \times 5 = 60$

② مساحته الجانبية = = = = $2 \times (4 + 5) \times 3 = 54$

③ مساحته الكلية = = = = $2 \times (4 + 5 + 3) \times 3 = 90$

④ مساحته الجانبية = = = = $2 \times (4 + 5) \times 3 = 54$

⑤ مساحته الكلية = = = = $2 \times (4 + 5 + 3) \times 3 = 90$

تدريب (٣)

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ وطول نصف قطر قاعدتها ٧ أوجد:

① حجمها ② مساحتها الجانبية

$\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

الحل

① حجم الأسطوانة = = = = $\pi \times 7^2 \times 10 = 1540$

② مساحتها الجانبية = = = = $2 \times 7 \times 10 = 140$

③ مساحتها الكلية = = = = $2 \times (7 + 7) \times 10 = 280$

④ مساحتها الجانبية = = = = $2 \times 7 \times 10 = 140$

⑤ مساحتها الكلية = = = = $2 \times (7 + 7) \times 10 = 280$



① كرة من الرصاص طول نصف قطرها ١٢ سم، صهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي ٤ أوجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة

الحل

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (12)^3 = 27648$

∴ حجم الأسطوانة = $\pi r^2 h = \pi r^2 \times 4 = 27648$

حجم الأسطوانة = حجم الكرة

$\pi r^2 \times 4 = 27648$

$r^2 = \frac{27648}{4\pi} = 1764$

$r = \sqrt{1764} = 42$



② قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب ح د فيه أ ب = ٤، ب ح = ٤، ح د = ٤، د أ = ٤ طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق أ ب على ح د أوجد حجم الأسطوانة الناتجة

الحل



محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤

$44 = 2\pi r$

$22 = \pi r$

حجم الأسطوانة = $\pi r^2 h = \pi \times 7^2 \times 10 = 1540$

$10 \times \pi \times 7^2 = 1540$

$10 \times \pi \times 49 = 1540$



تدريب (١٤)

اسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٥,٤ م^٣ وارتفاعها ١٠ م
أوجد طول نصف قطر قاعدتها وأوجد المساحة الجانبية $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

الحل

حجم الاسطوانة =
..... = $\pi r^2 h$
..... =
..... =
..... =
..... =
..... =
..... =

تدريب (١٥)

إذا كان طول نصف قطر كرة = ٣,٥ م
فأوجد حجم الكرة ومساحتها $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

الحل

حجم الكرة =
..... =
مساحة الكرة =
..... =

تدريب (١٦)

إذا كان حجم كرة $\pi 36$ م^٣ فأوجد طول قطرها

الحل

حجم الكرة =
..... = $\pi 36$
..... = $\pi 36$
..... =
..... =
..... =

..... = طول القطر



تمارين (٨) على تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① $\{5, 3\} \cap \{5, 2\} = \{ \}$

[$\{5\}$ ك $\{3\}$ ك $\{5, 3\}$ ك $\{5, 2\}$]

② $\left| \frac{1}{4} \sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{3}{4}} - 4\sqrt{5} \right| = \dots\dots\dots$

[$\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ك $\sqrt{2}$ ك $\sqrt{5}$ ك $\sqrt{2} - \sqrt{5}$]

③ إذا كانت $\frac{4}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ ، فإن قيمة

س^١ س^٢ = [١ ك ٤ ك ٢ ك ١٦]

④ مجموعة حل المعادلة $\frac{1}{x} = 9 - x^2$ هي

[ϕ ك $\{6\}$ ك $\{216\}$ ك $\{36\}$]

٤ درجات

(ب) إذا كانت $\frac{5}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ ،

فأثبت أن س ، ص عدداً مترافقان واحسب قيمة $\frac{س+ص}{س-ص}$

٣ درجات

(ج) أوجد على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد [$16, \infty$ -] \cup $\{ \infty, 2 \}$

٣ درجات



- ٨) الكرة التي طول نصف قطرها $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ تكون مساحتها = $\sqrt{}$
- ٩) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ $\sqrt{}$ وحجمها $\pi 2880 \sqrt{}$ فإن طول نصف قطر قاعدتها يساوي $\sqrt{}$

٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

- ١) مكعب حجمه ٨ $\sqrt{}$ فإن مساحته الجانبية = $\sqrt{}$
[٢ ٤ ١٦ ٢٤]
- ٢) إذا كانت المساحة الكلية للمكعب ٩٦ $\sqrt{}$ فإن مساحة الوجه الواحد =
[٢٤ $\sqrt{}$ ١٦ $\sqrt{}$ ١٦ $\sqrt{}$ ٤٨ $\sqrt{}$]
- ٣) حجم المكعب الذي طول حرفه ٤ =
[١٦ $\sqrt{}$ ٦٤ $\sqrt{}$ ٩٦ $\sqrt{}$ ٢٤ $\sqrt{}$]
- ٤) إذا كان حجم كرة هو $3\sqrt{3}\pi$ $\sqrt{}$ فإن طول نصف قطرها =
[$3\sqrt{2}$ $\sqrt{}$ $3\sqrt{3}$ $\sqrt{}$ ٣ $\sqrt{}$ ٣ $\sqrt{}$]
- ٥) طول نصف قطر الكرة التي حجمها 36π $\sqrt{}$ هو
[١ $\sqrt{}$ ٢ $\sqrt{}$ ٣ $\sqrt{}$ ٤ $\sqrt{}$]
- ٦) كرة حجمها $\frac{4}{3}\pi$ $\sqrt{}$ فإن طول قطرها =
[١ $\sqrt{}$ ٢ $\sqrt{}$ ٣ $\sqrt{}$ $\frac{1}{3}$ $\sqrt{}$]
- ٧) حجم كرة طول قطرها ٦ =
[4π $\sqrt{}$ 36π $\sqrt{}$ 288π $\sqrt{}$ 12π $\sqrt{}$]
- ٨) إذا كانت مساحة دائرة 2π $\sqrt{}$ فإن طول نصف قطرها =
[١ $\sqrt{}$ ٢ $\sqrt{}$ $2\sqrt{2}$ $\sqrt{}$ ٤ $\sqrt{}$]
- ٩) إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها ١١ هي 8π $\sqrt{}$ فإن ارتفاعها =
[١٠ $\sqrt{}$ ٨ $\sqrt{}$ ٤ $\sqrt{}$ ١٦ $\sqrt{}$]
- ١٠) أسطوانة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها فإن حجمها =
[$\frac{4}{3}\pi$ $\sqrt{}$ π $\sqrt{}$ $\frac{1}{3}\pi$ $\sqrt{}$ 2π $\sqrt{}$]



ثانياً : اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢) أوجد ما يأتي :

- ١) محيط الدائرة التي طول نصف قطرها ١٤ $\sqrt{}$
- ٢) مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ٧ $\sqrt{}$
- ٣) حجم مكعب طول حرفه ٢ $\sqrt{}$
- ٤) المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه ٣ $\sqrt{}$
- ٥) المساحة الكلية لمكعب طول حرفه ٤ $\sqrt{}$
- ٦) مساحة الكرة التي طول قطرها ٢ $\sqrt{}$
- ٧) حجم أسطوانة طول نصف قطرها ٧ $\sqrt{}$ وارتفاعها ١٠ $\sqrt{}$
- ٨) حجم متوازي مستطيلات أبعاده ٢ $\sqrt{}$ ٣ $\sqrt{}$ ٤ $\sqrt{}$
- ٩) المساحة الجانبية لمتوازي مستطيلات محيط قاعدته ١٥ $\sqrt{}$ وارتفاعه ٢ $\sqrt{}$
- ١٠) المساحة الكلية لمتوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٢ $\sqrt{}$ ٣ $\sqrt{}$ وارتفاعه ١٠ $\sqrt{}$

مسائل المستوى الثاني

٣) اكمل كلاً مما يأتي :

ملاحظة : $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$ ما لم يذكر غير ذلك

- ١) مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها $\sqrt{7}$ $\sqrt{}$ = $\sqrt{}$
- ٢) إذا كانت مساحة دائرة 25π $\sqrt{}$ فإن طول نصف قطرها = $\sqrt{}$
- ٣) مكعب حجمه ٦٤ $\sqrt{}$ فإن مساحته الكلية = $\sqrt{}$
- ٤) مكعب مساحته الكلية ٥٤ $\sqrt{}$ فإن طول حرفه = $\sqrt{}$
- ٥) إذا كان حجم مكعب ٢٧ $\sqrt{}$ فإن مساحته أحد أوجهه = $\sqrt{}$
- ٦) الكرة التي طول نصف قطرها يساوي ١ $\sqrt{}$ يكون حجمها مساوياً
✓
- ٧) الكرة التي حجمها $\frac{9}{4}\pi$ $\sqrt{}$ يكون طول نصف قطرها $\sqrt{}$



- ٧) أوجد حجم كرة طول نصف قطرها $\sqrt{17}$ [٢٨٨]
- ٢) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها $\pi 36$ [٢٢]
- ٣) كرة مساحتها $\pi 36$ أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد حجمها [٢٣١٤٢]
- ٤) كرة حجمها $\frac{\pi 500}{3}$ أوجد طول نصف قطرها [٢٥]
- ٥) أوجد طول قطر الكرة التي حجمها 4988 ($\pi = 3.1416$) [٢١٠]
- ٦) أوجد الحجم ومساحة السطح لكرة طول قطرها 4.2 [٢٥٥٤٤٢٣٨٨٨]
- ٧) كرة حجمها $\pi 562.5$ أوجد مساحة سطحها بدلالة π [٢٣٢٢٥]
- ٨) وضعت كرة داخل مكعب طول حرفه 14 سم فمست أوجهه الستة أوجد النسبة بين حجم الكرة وحجم المكعب [٢١٥١١]
- ٩) كرة حجمها $\pi 36$ وضعت داخل مكعب فمست أوجه المكعب الستة أوجد طول نصف قطر الكرة وحجم المكعب [٢٣١١٤٢٢]
- ١٠) كرة من المعدن طول نصف قطرها 3 سم صهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها 3 سم احسب ارتفاع الأسطوانة [٢٤]

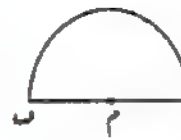
- ٨) ١) أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 20 سم وطول نصف قطر قاعدتها 7 سم [٢٣٨٠]
- ٢) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 14 سم وطول نصف قطر قاعدتها 10 سم أوجد المساحة الجانبية للأسطوانة [٢٨٨٠]
- ٣) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 5 سم وحجمها $\pi 125$ أوجد طول قطر قاعدتها [٢١٠]
- ٤) أسطوانة دائرية قائمة حجمها $\pi 500$ سم وطول نصف قطر قاعدتها 5 سم أوجد ارتفاعها [٢٢٠]
- ٥) إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة هو 1540 سم وارتفاعها 10 سم فأوجد طول نصف قطر قاعدتها ومساحتها الكلية [٢٧٨٤٢٧]



- ١١) طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها $\pi 40$ وارتفاعها 10 سم يساوي [١ ٢ ٣ ٤ ٥]
- ١٢) متوازي المستطيلات الذي أبعاده $2\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}$ من المستقيمات يكون حجمه = [٢٧ ١٨ ٢٧ ٦ ٣٦ ٦ ٦]

- ٥) ١) دائرة طول نصف قطرها 7 سم أوجد محيط الدائرة ومساحتها [٢١٤٤٢٤٤]
- ٢) دائرة محيطها 22 سم أوجد مساحة هذه الدائرة [٢٢٨٠]
- ٣) دائرة مساحتها 154 سم أوجد طول نصف قطرها [٢٠٧]
- ٤) دائرة مساحتها 154 سم أوجد محيط هذه الدائرة [٢٤٤]
- ٥) مربع مساحة سطحه 12 سم أوجد طول ضلعه [٢٦٧٧]

٦) في الشكل المقابل :



أ ب قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة 77 سم أوجد محيط الشكل [٢٣١]



٧) في الشكل المقابل :
الدائرتان متحدتان في المركز طول نصف قطريهما 3 ، 5 سم أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π

[٢٣١١]

- ٦) ١) مكعب طول حرفه 5 سم أوجد حجمه ومساحته الكلية [٢١٥٠٤٢١٢٥]
- ٢) مكعب حجمه 8 سم أوجد مساحة أحد أوجهه [٢٤]
- ٣) أوجد طول حرف مكعب حجمه $15\frac{5}{8}$ سم [٢٢٠٥]
- ٤) مكعب حجمه 1000 سم احسب مساحته الكلية [٢٦٠]
- ٥) مكعب حجمه 216 سم أوجد مساحته الجانبية [٢٦٤]
- ٦) إذا كان طول حرف مكعب يساوي طول نصف قطر الكرة التي حجمها $\pi 36$ سم أوجد المساحة الكلية للمكعب [٢٥٤]

[٢٥٤]



٦ إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة $\pi ٦٤$ وكان ارتفاعها = طول نصف قطرها
[٣٤]

أوجد ارتفاعها

٧ احسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة التي حجمها
[٣٦]

$\pi ٧٥٣٦$ وارتفاعها $\pi ٢٤$ ($\pi = ٣.١٤$)

٨ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤ وارتفاعها ٥ أوجد حجمها
[٣٧٧]

٩ أيهما أكبر حجماً أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ وارتفاعها ١٠ أم مكعب طول حرفه ١١ [الأسطوانة]

١٠ قطعة من النحاس على شكل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة طول نصف قطر قاعدتها ٩ وارتفاعها ٨ صهرت وحولت إلى كرة مصمتة

أوجد طول نصف قطر الكرة
[٣٩]

١١ قطعة من الشيكولاتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١١ وارتفاعها ١٠.٥ صهرت وحولت إلى ٣ مكعبات متساوية الحجم

أوجد طول حرف المكعب الواحد
[٣١١]

١٢ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ أوجد طول نصف قطر قاعدتها إذا علم أن حجمها يساوي $\frac{4}{3}$ حجم كرة طول قطرها ٢٠
[٣٦٠]

١٣ قطعة من الورق على شكل مستطيل ١٠ فيه ١٠ ب هـ ٤٤ طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق ١٠ على هـ

أوجد حجم الأسطوانة الناتجة
[٣١٥٤]

٩ ١ متوازي مستطيلات بُعِدَ قاعدته ٣ ، ٤ وارتفاعه ٦ أوجد :
١ حجمه ٢ مساحته الجانبية ٣ مساحته الكلية

٢ متوازي مستطيلات ارتفاعه ١٠ وحجمه ٣٦٠ أوجد مساحة قاعدته وإذا كان طول أحد أضلاع قاعدته ٩ فأوجد :
١ مساحته الجانبية ٢ مساحته الكلية

٣ متوازي مستطيلات أبعاده ٣ ، ٥ ، ٧ ارسم متوازي المستطيلات في أوضاع مختلفة من حيث اختيار القاعدة . هل تختلف المساحة الجانبية من وضع إلى آخر ؟

١٤ كرة جوفاء من المعدن طول نصف قطرها الداخلي ٢.٩ وطول نصف قطرها الخارجي ٣.٥ أوجد كتلتها لأقرب جرام علماً بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

٩٦



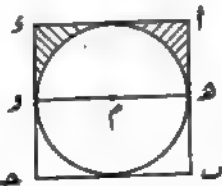
٣ قطعة من الرصاص على شكل متوازي مستطيلات أطوال أحرفه ٢٤ ، ٢١ صهرت وصنع من مادتها المنصهرة كرة أوجد طول نصف قطر الكرة
[٣٨]

٤ أيهما أكبر حجماً مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ أم متوازي مستطيلات أبعاده ٢٧ ، ٥ ، ٢٧ من الستيمترات [متوازي المستطيلات]



مسائل المتفوقين

١٠ في الشكل المقابل :



الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب هـ و فإذا كانت مساحة الجزء المظلل هو $\frac{٥}{٩} \pi$

أوجد محيط هذا الجزء ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

١١ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل أبعاده ٢٥ ، ١٥ قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضاً على شكل متوازي مستطيلات أوجد حجمه ومساحته الكلية
[٣١١٤ ، ٣١٧١]

١٢ صندوق من الزجاج على شكل مكعب بدون غطاء طول حرفه الخارجي ٦ فإذا كان سمك الزجاج المصنوع منه الصندوق يساوي ١ فأوجد حجم الزجاج المستخدم لصناعة الصندوق
[٣١٣١]

١٣ متوازي مستطيلات أبعاده ٣ ، ٥ ، ٧ ارسم متوازي المستطيلات في أوضاع مختلفة من حيث اختيار القاعدة . هل تختلف المساحة الجانبية من وضع إلى آخر ؟

١٤ كرة جوفاء من المعدن طول نصف قطرها الداخلي ٢.٩ وطول نصف قطرها الخارجي ٣.٥ أوجد كتلتها لأقرب جرام علماً بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

٩٧

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

أولاً : حل المعادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

المعادلة : هي جملة رياضية تحتوي على متغير (مجهول) مثل x وتحتوي على علامة التساوي مثل $x+3=1$ وتسمى معادلة من الدرجة الأولى حيث المتغير (المجهول) x مرفوعاً للقوة الأولى (الأس ١) وحل المعادلة هو إيجاد العدد الذي يحل محل المجهول ليجعل طرفي المعادلة متساويين فعلاً في المعادلة $x+3=1$ نجد أن العدد ٢ هو الذي يحل محل x ليجعل الطرفين متساويين في هذه الحالة نقول أن ٢ حل للمعادلة

ثانياً : حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح

المتباينة : هي الجملة الرياضية التي تحتوي على متغير مثل $x < 3$ وتتضمن علاقة $> < \geq \leq$ وحل المتباينة هو مجموعة العناصر التي يحقق كل منها المتباينة والخواص التالية تستخدم لحل المتباينات في ح :

- ① يمكن إضافة أو طرح عدد ثابت من طرفي المتباينة دون أن يتغير اتجاه
 - ② يمكن ضرب أو قسمة طرفي المتباينة على عدد ثابت موجب دون أن يتغير اتجاه
 - ③ يمكن ضرب أو قسمة طرفي المتباينة على عدد ثابت سالب مع تغيير اتجاه
- أي أن إذا كان a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية $a > b$ فإن
- $a + c > b + c$ ، $a - c > b - c$
 - $a > b$ إذا كانت c عدد موجب
 - $a < b$ إذا كانت c عدد سالب

أمثلة توضيحية

مثال ١ أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $x-2=4$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

نحاول أن نجعل x في طرف بمفردها لذلك نتخلص من الرقم المجموع أو المطروح ثم الرقم المضروب \times من

$$\therefore x-2=4 \quad (\text{إضافة ٢ إلى طرفي المعادلة})$$

$$\therefore x=6 \quad (\text{بقسمة الطرفين على ١})$$

$$\therefore x=6 \quad (\text{بقسمة الطرفين على ١})$$



مثال ٢ أوجد في ح مجموعة حل المعادلات الآتية مع التمثيل على خط الأعداد

$$\text{① } x-2=3$$

$$\text{② } 2(x+1)-3=0$$

الحل

$$\text{① } x-2=3$$

$$\therefore x=5$$

$$\therefore x=5$$

$$\therefore x=5$$



$$\text{② } 2(x+1)-3=0$$

$$\therefore 2x+2-3=0$$

$$\therefore 2x-1=0$$

$$\therefore 2x=1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$



مثال ٣ أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $3\sqrt{x}+2=5$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$3\sqrt{x}+2=5$$

$$\therefore 3\sqrt{x}=3$$

$$\therefore \sqrt{x}=1$$

$$\therefore x=1$$



حل المعادلات والمتباينات في ح

② $3 - 2 \leq 7$ (بالضافة (-3) للطرفين)

$3 - 2 - 3 \leq 7 - 3$

$1 \leq 4$ (بالقسمة على 1)

$1 \leq 4$ (لاحظ تغير اتجاه علامة المتباينة)

$1 \leq 4$

(الأنظ أوه)

عند ضرب أو قسمة طرفي

المتباينة على عدد سالب

نعكس اتجاه علامة المتباينة



(بالقسمة على 1)

(لاحظ تغير اتجاه علامة المتباينة)



أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح على صورة فترة

ثم مثل الحل على خط الأعداد :

① $2 \geq 3$ ② $3 - 2 \leq 5$

الحل

(بالضافة (-1) إلى طرفي المتباينة)

① $2 \geq 3$

$2 - 1 \geq 3 - 1$

(بالقسمة على 1)

$1 \geq 2$

$1 \geq 2$

$1 \geq 2$



(بالضافة (-2) إلى طرفي المتباينة)

② $3 - 2 \leq 5$

$3 - 2 - 2 \leq 5 - 2$

(بقسمة الطرفين المتباينة على 1)

$1 \leq 3$

$1 \leq 3$

$1 \leq 3$



ملاحظة

• إذا طلب مجموعة الحل للمتباينة السابقة في ط أو في ص فتكون بهذا الشكل :

مجموعة حل هذه المتباينة في ط $\{0, 1, 2\}$

مجموعة حل هذه المتباينة في ص $\{0, 1, 2, 3\}$

المعادلة في المتباينات

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$



$\frac{2-3}{3} = \frac{2-3}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{2-3}{3}$

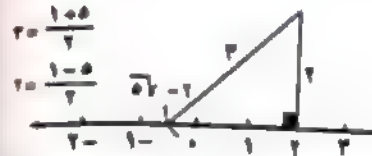
$\frac{2-3}{3} = \frac{2-3}{3}$

أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $2 = 5 - 2$ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$\frac{1-2}{3}$

$\frac{1-2}{3}$



$2 = 5 - 2$

$2 = 5 - 2$

$\{2\} = \text{حل}$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح على صورة فترة

ثم مثل الحل على خط الأعداد :

① $3 \leq 6$ ② $4 \leq 5$ ③ $2 - 3 \leq 7$

الحل

(بالضافة (-1) للطرفين)

① $3 \leq 6$

$3 - 1 \leq 6 - 1$

$2 \leq 5$

بضرب الطرفين في $\frac{1}{3}$

$2 \leq 5$

$\frac{1}{3} \times 2 \leq \frac{1}{3} \times 5$

$\frac{2}{3} \leq \frac{5}{3}$



(بالضافة (-1) للطرفين)

② $4 \leq 5$

$4 - 1 \leq 5 - 1$

$3 \leq 4$

(بالتقسيم على $\frac{1}{4}$)

$2 \leq 5$

$\frac{1}{4} \times 3 \leq \frac{1}{4} \times 4$

$\frac{3}{4} \leq 1$





أوجد على صورة فترة مجموعة الحل في ح للمتباينة الآتية:

$$\frac{4-س}{3} > \frac{3-س}{2}$$



الحل

(نطرح الطرفين $\times 6$)

$$\frac{4-س}{3} > \frac{3-س}{2}$$

(إضافة (-) 10 س) للطرفية

$$8-س > 9-س$$

(إضافة (9) للطرفية)

$$8-س > 9-س$$

(بالقسمة على 2)

$$1 > 2-س$$

$$] \frac{1}{2}, \infty[= ح.م.:$$

$$\frac{1}{2} > س$$

حل المتباينة $س + 5 > 2س + 1 > 9 + س$ في ح



ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$س + 5 > 2س + 1 > 9 + س$$

$$س + 5 > 2س + 1 \Rightarrow س > 9 + س$$

$$9 > 1 + س \Rightarrow 8 > س$$

$$1-9 > 1-1+س \Rightarrow 1-9 > س$$

$$8 > س > 4$$

$$] 4, 8[= ح.م.:$$



حل المتباينة الآتية في ح ثم مثل الحل على خط الأعداد:



$$س + 8 \leq 4-س < 1+2س$$

الحل

نلاحظ أن معاملات س مختلفة في الأطراف الثلاثة للمتباينة لذلك نقسم المتباينة إلى متباينتين وهما:

$$① س + 8 \leq 4-س$$

$$② 4-س < 1+2س$$

ثم نوجد مجموعة التقاطع لمجموعة الحل

حل المعادلات والمتباينات في ح

①

$$س + 8 \leq 4-س$$

$$س + 8 \leq 4-س \Rightarrow س \leq 4-س$$

$$8 \leq 4-س$$

$$س + 8 \leq 4-س \Rightarrow س \leq 4-س$$

$$1+8 \leq 4-س$$

$$س + 8 \leq 4-س \Rightarrow س \leq 4-س$$

$$9 \leq 4-س$$

$$س + 8 \leq 4-س \Rightarrow س \leq 4-س$$

$$3 \leq 4-س$$

$$س + 8 \leq 4-س \Rightarrow س \leq 4-س$$

$$1 < 3 \leq س$$

$$] 3, 1[= ح.م.:$$



أمثلة للتدريب

تدريب (1)

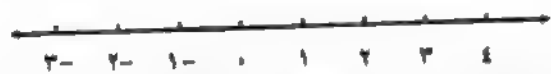
أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح مع التمثيل على خط الأعداد

$$س - 5 = 1$$

$$س = \dots$$

$$] 3, 1[= ح.م.:$$

وتمثل على خط الأعداد



تدريب (2)

حل المتباينة $س - 3 \geq 1$ في ح ثم مثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$س - 3 \geq 1$$

$$س \geq 4$$

$$س \geq 4$$

$$] 4, \infty[= ح.م.:$$



تدريب (3)

حل المتباينة $س - 8 < 3$ في ح ثم مثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$س - 8 < 3$$

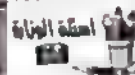
$$س < 11$$

$$س < 11$$

$$س < 11$$

$$] 11, \infty[= ح.م.:$$





على حل المعادلات والمتباينات في ح

تمارين (٩)

١ ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك



التمارين
تركتي
(٧)

(١) أكمل كلاً مما يأتي:

- ① $28\sqrt{2}$ ينحصر بين العددين الصحيحين ،
- ② المساحة الجانبية لتوازي مستطيلات محيط قاعدته $10\sqrt{2}$ وارتفاعه $2\sqrt{2}$ =
- ③ أبسط صورة للمقدار $18\sqrt{2} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - 8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$ هي
- ④ $[2, \infty) \cup [-3, 2] =$

٤ درجات

(ب) كرة من المعدن طول قطرها $6\sqrt{2}$ صهرت وحوّلت إلى اسطوانة دائرية قائمة طوله نصف قطر قاعدتها $3\sqrt{2}$ احسب ارتفاع الأسطوانة

٣ درجات

(ج) إذا كان $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} =$ فأوجد قيمة $(س + س - 1)^2$

٣ درجات

تدريب (٤)

حل المتباينة $7 - س < 8 - س + 1$ في ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$7 - س < 8 - س + 1$$

$$7 - س < 9 - س$$

$$7 - س < 9 - س$$

$$7 - س < 9 - س$$

(نمثل العيّنات في طرف والأعداد في طرف)

(بالقمة على)



تدريب (٥)

حل المتباينة $3 \geq 2 + س > 1$ في ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$3 \geq 2 + س > 1$$

$$3 \geq 2 + س > 1$$

$$3 \geq 2 + س > 1$$

$$3 \geq 2 + س > 1$$

$$3 \geq 2 + س > 1$$

(بالقمة على)

(بالقمة على)



تدريب (٦)

حل المتباينة $4 - س > 2 - س + 1 > 3$ في ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

$$4 - س > 2 - س + 1 > 3$$

$$4 - س > 2 - س + 1 > 3$$

$$4 - س > 2 - س + 1 > 3$$

$$4 - س > 2 - س + 1 > 3$$

$$4 - س > 2 - س + 1 > 3$$

$$4 - س > 2 - س + 1 > 3$$

(بالقمة على)

(بالقمة على)





ثانياً: اجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

٢ أوجد في x مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

٢٢ $x = 4 + 3$

١ $1 = 6 + 5$

٢٣ $10 = 4 - 2$

٢ $4 = 3 - 2$

٢٤ $7 = 2 - 3$

٥ $5 = 1 - 2$

٣ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في x ومثل الحل على خط الأعداد :

٢٥ $x > 2$

٢٦ $x \geq 4$

١ $x < 3$

٢٧ $x \geq 5$

٢٨ $x > 2$

٢٩ $x > 1$

٣٠ $11 > 1 - x$

٣١ $11 \leq 5 + x$

٣٢ $7 > 2 + x$

٣٣ $16 > x - 4$

٣٤ $\frac{1}{2} \geq 1 + x$

٣٥ $9 \geq 1 - x$

٣٦ $1 - x \geq 5$

٣٧ $1 \leq 2 - x$

٣٨ $7 \leq 1 + x$

٣٩ $4 \leq \sqrt{x}$

٤٠ $3 + x \leq 5$

٤١ $8 \leq 6 - x$

٤ اكمل ما يأتى :

١ مجموعة حل المعادلة $x = 3$ في x هي، وفي x هي

٢ مجموعة حل المعادلة $x + 2 = 1$ في x هي، وفي x هي

٣ إذا كانت مجموعة حل المعادلة $x + 2 = 6$ في x هي $\{2\}$ فإن $f =$

٤ إذا كانت $x + 2 = 4$ فإن $x =$ مجموعة الأعداد

٥ مجموعة حل المتباينة $x < 2$ في x هي

٦ مجموعة حل المتباينة $x \leq 2$ في x هي

٧ مجموعة حل المتباينة $x \leq 2$ في x هي

٨ مجموعة حل المتباينة $3 \geq x > 5$ في x هي

٩ مجموعة حل المتباينة $x - 2 \geq 1 + x > 8$ في x هي

١٠ إذا كانت $[-4, \infty)$ هي مجموعة حل المتباينة $x \geq 1$ فإن $b =$



٥ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين فيما يأتى :

١ مجموعة حل المعادلة $x - 3 = 7$ في x هي

[$\{4\}$ ك $\{10\}$ ك $\{5\}$ ك ϕ]

٢ مجموعة حل المعادلة $x - 3 = 3\sqrt{x}$ في x هي

[$\{3\}$ ك $\{3\sqrt{3}\}$ ك صفر ك ϕ]

٣ إذا كانت $x - 1 = 1$ فإن x

[ϕ ك \sqrt{x} ك $\sqrt{3}$ ك $\sqrt{2}$]

٤ العنصر ٣ ينتمى إلى مجموعة حل المتباينة

[$x > 2$ ك $x < 2$ ك $x \geq 2$ ك $x \leq 2$]

٥ مجموعة حل المتباينة $x < 7$ في x هي

[$[-7, \infty)$ ك $[-7, \infty]$ ك $[-7, \infty)$ ك $[-7, \infty]$]

٦ مجموعة حل المتباينة $x > -1$ في x هي

[$\{(1, -1)\}$ ك $[-1, 1)$ ك $\{1, -1\}$ ك $[-1, 1]$]

٧ إذا كانت $x \in [-2, \infty)$ فإن العبارة تمثل المتباينة

[$x < -2$ ك $x \leq -2$ ك $x > -2$ ك $x \geq -2$]

٨ إذا كانت $x + 1 \leq 3$ فإن $x \in$

[$[-2, \infty)$ ك $[-2, \infty]$ ك $[-2, \infty)$ ك $[-2, \infty]$]

٩ مجموعة حل المتباينة $x - 1 \geq 1$ في x هي

[$[-2, 1)$ ك $[-2, 1]$ ك $[-2, 1)$ ك $[-2, 1]$]



مسائل المستوى الثانى

٦ أوجد في x مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

٢١ $\frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$

٢٢ $x = 4 - 2$

٢٣ $1 = 1,4 + x$

٢٤ $\frac{1}{x} = 5 - \frac{1}{x}$

٢٥ $11 = 8 + (x - 2)3$

٢٦ $6 = (5 + x)2$

٢٧ $2 - 6 = (3 - x)2$

٢٨ $3(2 - x) = 5 + 5$



أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

① $2 = 1 - 3\sqrt{x}$

② $1 = 1 - 2\sqrt{x}$

③ $2 = 2\sqrt{x} - 4$

④ $5 = 3 - 2\sqrt{x}$

⑤ $9 = 1 - 5\sqrt{x}$

⑥ $5 = 2 - 3\sqrt{x}$

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

① $3\sqrt{x} = 2 - 1$

② $5\sqrt{x} = 1 - 1$

③ $1 = 2\sqrt{x} + 1$

④ $2 = 3\sqrt{x} + 1$

⑤ $2\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$

⑥ $2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$

⑦ $12\sqrt{x} = (1 + 1)2\sqrt{x}$

⑧ $3\sqrt{x} = 3\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$

⑨ $5\sqrt{x} + 2 = 5\sqrt{x} + 2$

⑩ $2(1 - 1) = 2(1 - 1)$

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح ومثل الحل على خط الأعداد :

① $2 > 3 + 2 \geq 1 - 1$ [1, 2]

② $0 < 2 - 3 > 1$ [1, 2]

③ $4 \geq 2 - 3 > 1$ [1, 2]

④ $2 > 1 - 2 \geq 3 - 4$ [1, 2]

⑤ $4 > 3 + 1 \geq 1 + 1$ [1, 2]

⑥ $5 > 3 - 4 \geq 7 - 8$ [1, 2]

⑦ $1 - 1 > 2 - 1 \geq 5$ [1, 2]

⑧ $9 > 1 - 2 \geq 11 - 12$ [1, 2]

⑨ $5 > 5 - 1 \geq 1$ [1, 2]

⑩ $7 > 1 - 1 \geq 1$ [1, 2]

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح ومثل الحل على خط الأعداد :

① $2 + 1 \leq 3 + 1$

② $3 + 2 \geq 2 + 1 - 5$

③ $9 + 5 > 3 - 2$

④ $2 - 3 \leq 4 - 2$



① $1 - 1 \leq 2 - 1$

② $2 + 2 \geq 3 + 2 > 2 + 5$

③ $1 - 1 > 3 - 1 \geq 1 + 1$

④ $4 \geq 5 \geq 2 + 4 > 3 + 1$

⑤ $5 \geq 6 < 7 + 5 < 5$

⑥ $10 - 1 > 4 - 1$

⑦ $11 + 3 > 5 > 7 + 5 \geq 2 + 1$

⑧ $4 + 1 > 4 - 1 \geq 2 + 1$



مسائل التفوقين

أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية حيث $1 \leq x \leq 10$:

① $\frac{(4 + 5)x}{3} < \frac{8 - 1}{4}$

② $\frac{3 + 7}{4} \geq \frac{1 - 1}{2} \geq \frac{3 + 3}{4}$

③ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + 1 \geq \frac{4 - 3}{4}$

[1, 10]

[1, 10]

[1, 10]

إذا كان [1, 10] هي مجموعة حل المتباينة $1 > 2 - x$ ، أوجد قيمة x :

[1, 10]

هل $5\sqrt{x}$ ينتمي لمجموعة حل أى متباينة مما يأتى مع الأثبات :

① $5 > 3 - 2 \geq 1 - 1$

② $\frac{4 - 3}{4} > \frac{1}{4} + 1 > \frac{1}{4}$

اختبارات (١)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

اختبار مراجعة على ما سبق

أدخل ما يأتي:

١. $[1, 1] \cup [0, 1] = \dots\dots\dots$

٢. قيمة العدد $\sqrt{11}$ أقرب جزء من مائة هو

٣. مجموعة حل المعادلة $8 = x^2$ في \mathbb{R} هي

٤. نصف قطر الكرة التي حجمها $\frac{4}{3}\pi$ هو

٥. إذا كانت $x > \sqrt{2}$ ، $x + 1$ حيث $x \in \mathbb{R}$ فإن $x = \dots\dots\dots$

٢. (١) مثل العدد $1 + \sqrt{2}$ على خط الأعداد

(ب) إذا كانت $x = \sqrt{2} - 2$ ، $x = \sqrt{2} + 2$

ثابتة أن $x + 1 = (x - 1)^2$

٣. أوجد مجموعة الحل في \mathbb{R} لكل مما يأتي:

١. $x + 3 \leq x + 2 \leq x - 2$
٢. $|x - 2| = \sqrt{2} - 1$

نموذج (٢)

اختبار مراجعة على ما سبق

أدخل ما يأتي:

١. $[3, 4] \cap [1, 5] = \dots\dots\dots$

٢. إذا كانت $x > \sqrt{2}$ ، $x + 1$ حيث $x \in \mathbb{R}$ فإن $x = \dots\dots\dots$

٣. اثنان $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ و $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ في أبسط صورة هو

٤. مجموعة حل المتباينة $5 \leq x + 2$ في \mathbb{R} هي

٢. (١) هذه النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{2} - 1$ على خط الأعداد

(ب) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٥ سم وحجمها $\frac{4}{3}\pi$ أوجد طول قطرها

٣. (١) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{2} - 1 = x$ و مثل الحل على خط الأعداد

(ب) إذا كانت $x = \sqrt{2} - 1$ ، $x = \sqrt{2} + 1$

فأوجد قيمة $x^2 + 2x + 1$

نموذج (٣)

اختبار مراجعة على ما سبق

١. اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين:

١. $\sqrt{3} \in \dots\dots\dots$ [٤٤٣] د [١٤٠] د [٢٤١] د [٣٤٢] د

٢. إذا كانت $x \in [2, 4]$ فإن $x^2 \in \dots\dots\dots$

[٤٤٤] د [٢٤٠] د [٤٤٠] د [٠٤٤] د

٣. إذا كانت المساحة الكلية للمكعب ٩٦ فإن مساحة الوجه الواحد =

[٢٤] د [١٦] د [١٦] د [٤٨] د

٤. مجموعة حل المتباينة $1 \geq x - 2$ في \mathbb{R} هي

[١٤١] د [٢٤٠] د [١٤٠] د [٢٤١] د

٥. $\sqrt{25} = \dots\dots\dots$ [٥] د [١٥] د [١٢٥] د [٥] د

٢. (١) أوجد مستقيماً يخط الأعداد $[-2, 3] \cup [4, 5]$

(ب) إذا كانت $x = \sqrt{2} - 1$ ، $x = \sqrt{2} + 1$

فأوجد قيمة $x^2 + 2x + 1$

٣. (١) أوجد مجموعة حل المتباينة $1 + x < 4$ و $2 < x - 1$

(ب) اسطوانة دائرية قائمة حجمها $\frac{4}{3}\pi$ و ارتفاعها ٥ سم أوجد مساحتها الكلية



العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثانية

إذا فرضنا أن مدرسة مشتركة قررت عمل رحلة علمية يكون عدد المشاركين فيها ٢٠ وكان عدد البنات = س وعدد البنين = ص فإن $س + ص = ٢٠$ أي أن عدد البنات + عدد البنين = ٢٠، ونلاحظ أنه كلما تغير عدد البنات يتغير عدد البنين فيمكن أن يكون عدد البنات (س) = ١٠ وعدد البنين (ص) = ١٠ أي أن $١٠ + ١٠ = ٢٠$ أو عدد البنات = ٦ وعدد البنين = ١٤ فيكون المجموع ٢٠، أو عدد البنات = ٩ فيكون عدد البنين = ١١ لذلك نقول أن هناك علاقة بين عدد البنات وعدد البنين فكلما تغير عدد البنات يتغير عدد البنين والعكس صحيح كلما تغير عدد البنين يتغير عدد البنات بحيث يكون مجموعهما ٢٠ ونلاحظ أنه يوجد عديدين يتغير أحدهما فيتغير الآخر وهما س، ص لذلك يسميان "متغيرين" وتسمى العلاقة بينهما "العلاقة بين متغيرين"

والصورة العامة للعلاقة بين متغيرين س، ص تكون على الصورة

$$ص + ب = ح$$

حيث $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$

وتسمى علاقة خطية بين المتغيرين س، ص وتمثل بيانياً بخط مستقيم

ويمكن إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س، ص) تحقق العلاقة فمثلاً : في العلاقة السابقة بين عدد البنات وعدد البنين حيث $س + ص = ٢٠$ فإننا يمكن إيجاد بعض الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة مثل (١٠، ١٠) ، (٦، ١٤) ، (٩، ١١) ، (٥، ١٥) ونلاحظ أن كل زوج مرتب يكون مجموع س + ص فيه يساوي ٢٠



ملاحظات

- أي زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق العلاقة الخطية (يجعلها عبارة صحيحة أي يجعل طرفها الأيمن = طرفها الأيسر) يعتبر حلاً لهذه العلاقة
- العلاقة بين متغيرين (مجهولين) لها عدد لا نهائي من الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة وتمثل العلاقة بين متغيرين بيانياً فإننا نأخذ زوجين مرتبين يحققان العلاقة ونمثلهما بنقطتين في مستوى ديكارتي ثم نرسم مستقيم يمر بهاتين النقطتين فيكون المستقيم هو التمثيل البياني لها، ونوجد زوجاً مرتباً ثالثاً للتأكد من صحة التمثيل
- كل نقطة \in الخط المستقيم الممثل للعلاقة يمثلها زوج مرتب يحقق العلاقة
- الخط المستقيم الممثل للعلاقة $س + ب = ح$ يمر بنقطة الأصل إذا كان $ح = ٠$
- إذا كانت $أ = ٠$ فإن العلاقة تصبح على الصورة $ب = ح$ ويمثلها مستقيم يوازي محور السينات
- إذا كانت $ب = ٠$ فإن العلاقة تصبح على الصورة $أ = ح$ ويمثلها مستقيم يوازي محور الصادات
- العلاقة $ص = ٠$ يمثلها محور السينات
- العلاقة $س = ٠$ يمثلها محور الصادات

أمثلة توضيحية

١ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة $س + ص = ٣$ ومثلها بيانياً

الحل

لتسهيل إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة نجعل ص في طرف وباقي حدود العلاقة في الطرف الآخر لتكون في صورة يسهل التمييز فيها $\therefore س + ص = ٣ \therefore س = ٣ - ص$

ثم نعوض عن س بعدة أرقام لتوجد قيمة ص في العلاقة في صورتها الجديدة

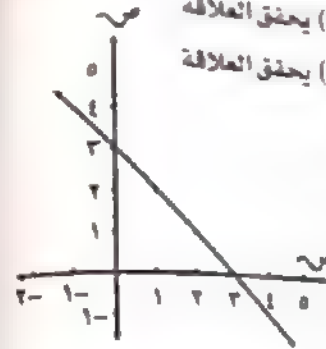


عندما $x = 0$: $y = 0 - 3 = -3$: يحقق العلاقة (3, 0)

عندما $x = 1$: $y = 1 - 3 = -2$: يحقق العلاقة (2, 1)

عندما $x = 2$: $y = 2 - 3 = -1$: يحقق العلاقة (1, 2)

عندما $x = 3$: $y = 3 - 3 = 0$: يحقق العلاقة (0, 3)



ثم نرسم محاور الإحداثيات في المستوى الديكارتي ونمثل عليه الأزواج المرتبة بنقط كما بالشكل ونصل بين النقاط بخط مستقيم فيكون هو التمثيل البياني للعلاقة

مثال بياناً العلاقة $x + 2y = 5$



الحل

ملاحظة

يمكن إيجاد حلين للمعادلة بالتعويض عن $x = 0$ وإيجاد قيمة y ثم التعويض عن $y = 0$ وإيجاد قيمة x .

لسهولة الحل نجعل x في طرف و y في طرف ثم نعوض في أحدهما لإيجاد الآخر ويفضل أن يكون المتغير الذي معاملته 1 في الطرف الأيمن

$x + 2y = 5$: $x = 5 - 2y$

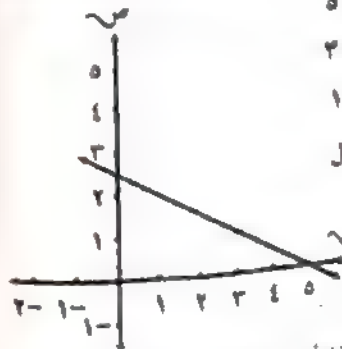
عندما $x = 0$: $0 + 2y = 5$: $2y = 5$: $y = 2.5$

عندما $x = 1$: $1 + 2y = 5$: $2y = 4$: $y = 2$

عندما $x = 2$: $2 + 2y = 5$: $2y = 3$: $y = 1.5$

ويمكن وضع الحلول الثلاثة في جدول

س	5	2	1
خ	0	1	2



ملاحظة: الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل إذا كان الحد المطلق يساوي صفراً إذا كان $x + 2y = 0$ صفراً

114



مثل بياناً المستقيم الذي يمثل العلاقة $x + 2y = 12$ وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات في النقطة أ، ويقطع محور الصادات في النقطة ب فتأوجد مساحة $\triangle AOB$ حيث O هي نقطة الأصل

الحل

ملاحظة

يفضل اختيار أرقام تصلح للتعويض حتى يقبل البسط القسمة على المقام

لسهولة إيجاد الحلول نكتب المعادلة

في صورة يسهل التعويض فيها

$x + 2y = 12$

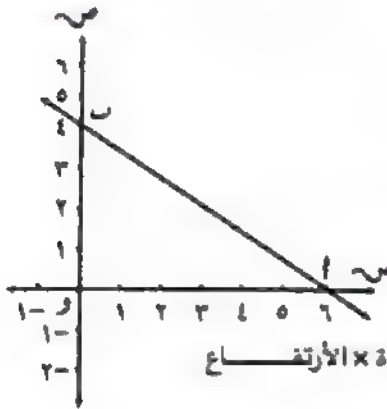
$x = 12 - 2y$ (بالقسمة على 2)

$x = 12 - 2y$: أو $x = 12 - 2y$ (يفضل التعويض عن y بعد نوح)

بأخذ $x = 0$: $0 = 12 - 2y$: $2y = 12$: $y = 6$: يحقق العلاقة (0, 6)

بأخذ $x = 2$: $2 = 12 - 2y$: $2y = 10$: $y = 5$: يحقق العلاقة (2, 5)

بأخذ $x = 4$: $4 = 12 - 2y$: $2y = 8$: $y = 4$: يحقق العلاقة (4, 0)



ثم نمثل هذه الأزواج المرتبة

ونصل بينها بخط مستقيم

فيكون هو الخط المستقيم الممثل للعلاقة

ونلاحظ أن المثلث AOB

قائم الزاوية في O

\therefore مساحة $\triangle = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

\therefore مساحة $\triangle = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ وحدة مربعة



مثال ٦ إذا كان (١، ٢) يحقق العلاقة $٣س + ص = ٧$ فأوجد قيمة ١

الحل

∴ (١، ٢) يحقق العلاقة ∴ نعوض عن $س = ٢$ ، $ص = ١$ في العلاقة

$$٧ = ١ + ٢ \times ٣$$

$$٧ = ١ + ٢ \times ٣$$

$$١ = ١$$

$$٦ - ٧ = ١$$



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

مثل بيانياً العلاقة $ص = س + ١$

الحل

عندما $س = ٠$ ∴ $ص = ١$

عندما $س = ١$ ∴ $ص = ٢$

عندما $س = ٢$ ∴ $ص = ٣$

س			
ص			

مثل بيانياً العلاقة $ص = س + ٣$

الحل

عندما $س = ٠$ ∴ $ص = ٣$

عندما $س = ١$ ∴ $ص = ٤$

عندما $س = ٢$ ∴ $ص = ٥$

س			
ص			

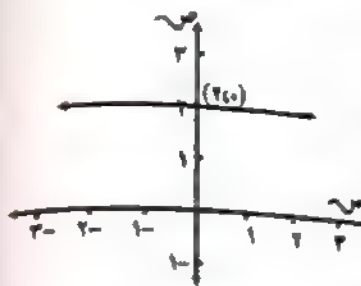
مثال ٤ مثل بيانياً كلا من العلاقات الآتية:

$$٢س = ٥$$

$$١س - ٢ = ٠$$

الحل

$$١س - ٢ = ٠ \quad \therefore ١س = ٢$$



العلاقة يمثلها خط مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه مسافة ٢ وحدة فوق محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٢، ٠)

نلاحظ: العلاقة $١س = ٢$ يمثلها محور السينات نفسه



$$١س - ٢ = ٠ \quad \therefore ١س = ٢$$

العلاقة يمثلها خط مستقيم يوازي محور الصادات ويبعد عنه ٢ وحدة جهة اليمين ويقطع محور السينات في النقطة (٢، ٠)

نلاحظ: العلاقة $١س = ٢$ يمثلها محور الصادات نفسه

٥ بين أي من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة $س + ص = ٤$:

- ① (١، ٣) ② (١، ٣) ③ (٢، ١) ④ (٣، ١)

الحل

① بالتعويض عن $س = ١$ ، $ص = ٣$ في الطرف الأيمن للعلاقة

∴ الطرف الأيمن $٤ = ١ + ٣$ وحيث أنه \neq الطرف الأيسر

∴ (١، ٣) لا يحقق العلاقة

ونكرر العمل السابق مع كل زوج مرتب فنجد أن:

$$٢ (١، ٣) \quad \therefore ٤ = (١) + (٣) \quad \text{يحقق العلاقة}$$

$$٣ (٢، ١) \quad \therefore ٢ = ٣ + (١) \quad \text{لا يحقق العلاقة}$$

$$٤ (٣، ١) \quad \therefore ٢ = (٣) + ١ \quad \text{لا يحقق العلاقة}$$



مسائل المستوى الأول

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

$$y = u + v \quad \text{②}$$

$$u = v + u \quad \textcircled{1}$$

② ۵ - ۵ = ۵

$$e = u + v \quad (6)$$

⑤ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \textcircled{A}$$

⑤ ۳-۲-۱

① إذا كان (٢، ١) يحقق العلاقة $x - y = 1$ = صفر فإن $.....$

② إذا كان الزوج المرتب (٣، ١) يحقق العلاقة $س + ٢ ص = هـ$ فإن $هـ =$

③ إذا كان (1، 1) يحقق العلاقة $2x + y = 3$ فإن $1 = 3$

④ إذا كان الزوج المرتب (ب، ٥) يحقق العلاقة $س + ع = ٢$ فإن ب =

⑤ أحد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة $s + v = 5$ هو (٢ ،)

⑥ الزوجان المرتبان (.....، ٠)، (.....، ٠)، يحققان العلاقة ٣ من - ٤ ص = ١٢

٥) العلاقة ٣ س + ٢ ص = هـ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠)

عندما = =

⑧ الأزواج المرتبة $(1, \dots), (\dots, 1)$ تحقق العلاقة ٢ - ٣ ص ٥

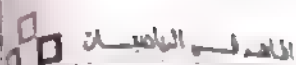
٩ العلاقة ٢ س + ٥ ص = ٧ لها عدد من الأزواج المرتبة التي تحققها

١٠) الشكل البياني الذي يمثل العلاقة $S = 3$ هو خط مستقيم يوازي محور

ويبعد عنه بمقدار وحدة طول

١١) الخط المستقيم الممثل للعلاقة ص - ٢ =، يوازي محور ويبعد عنه

(١٢) التمثيل البياني للعلاقة التي على الصورة $h = v$ هو خط مستقيم يوازي

[illegible]

أهلاً بك

على العلاقة بين متغيرين

(10) 4,4'

بإدارة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

۹ (۱) اعمل ما یاتو :

$$\dots\dots = 1 - \alpha; \dots\dots = \alpha \ln[1 + (t-1) \frac{1}{\alpha}] \quad (9)$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \quad (2)$$

۴) ادا خان میں $\sqrt{13} > 3 + 1$ ، $3 + 1$ میں $3 + 1 = 4$ ،

$$\dots\dots\dots = (1 - \sqrt{V})(1 + \sqrt{V}) \textcircled{d}$$

1
میرزا

(ب) عين النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{5}$ على خط الأعداد

٢

(ح) اسطوانة دالرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم وحجمها ١٥٤٠ سم^٣
أوجد مساحتها الكلية





١٠) أحد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة $s + \frac{1}{4} = 7$ هو

[(٢، ٣) د (٤، ٢) د (٤، ٣) د (٦، ٤)]

١١) إذا كانت النقطة (٣، ٢) تنتمي للمستقيم الممثل للعلاقة $s - 2 = 3$ فإن $s = 0$

فإن $s = 0$ [٨ د ٨- د ٤- د ٤]

١٢) المستقيم الممثل للعلاقة $s + 2 = 3$ هو

[يوازي محور السينات د يوازي محور الصادات د يقطع المحورين د غير ذلك]

١٣) العلاقة $s + 3 = 8$ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات في

النقطة [(٨، ٠) د (٠، ٨) د (٣، ٠) د (٠، ٣)]

١٤) (٢، ٣) لا تحقق العلاقة

[$s + 5 = 3$ د $s - 3 = 3$ د $s + 7 = 1$ د $s - 1 = 1$]

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

١٥) الجدول الآتي يبين علاقة

س، ص وهي

[$s + 4 = 1$ د $s = 1 + 3$ د $s - 1 = 2$ د $s - 3 = 2$]



مسائل المستوى الثاني

٥) باستخدام العلاقة الخطية أكمل الجدول فيما يأتي :

٢) $s - 5 = 0$

س	١		٥
ص		٣	

١) $s + 2 = 1$

س	٢	٠	١-
ص			



١٣) العلاقة $s + 2 = 0$ تمثل بيانياً بخط مستقيم يمر بالنقطة (.....،)

١٤) إذا كان (ك، ٢) يحقق العلاقة $s + 1 = 0$ فإن ك =

١٥) المستقيم الممثل للعلاقة $s = 3$ يقطع محور السينات في النقطة

٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس واكتبها في فراصة أجاوبتك :

١) أي الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة $s + 2 = 5$

[(٣، ١-) د (٢، ٢) د (١، ٢) د (٣، ١)]

٢) العلاقة $s + 2 = 5$ يمثلها مستقيماً يمر بالنقطة

[(٥، ١) د (٠، ٥) د (٣، ٢) د (٢، ٣)]

٣) إذا كانت النقطة (٠، ١) تحقق العلاقة $s - 2 = 4$ فإن قيمة ١ =

[١ د ٢ د ٢- د ٣-]

٤) العلاقة $s - 5 = 0$ تمثل بيانياً بـ

[مثلث د نقطة د خط مستقيم د منحنى]

٥) العلاقة $s + 3 = 2$ يحققها الزوج المرتب

[(٠، ٠) د (١، ٥) د (١، ٢) د (١، ٤)]

٦) العلاقة $s + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ يحققها الزوج المرتب

[(٠، ٠) د (٣، ١) د (١، ٤-) د (١، ٤)]

٧) العلاقة $s - 3 = 0$ يحققها الزوج المرتب

[(٠، ٣) د (٣، ٣-) د (٣، ٣) د (٣، ٣-)]

٨) عدد الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة $s + 2 = 0$ هو

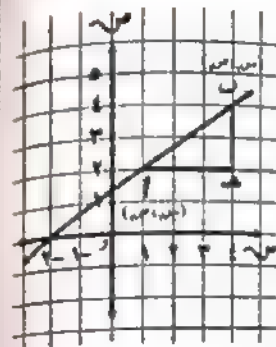
[١ د ٢ د صفر د عدد لا نهائي]

٩) إذا كان (٠، ب) يحقق العلاقة $s = 3$ (ص - ٤) فإن ب =

[صفر د ٣ د ٤ د ٥]



ميل الخط المستقيم



إذا تحركت نقطة على خط مستقيم من موضع $(س_1, ص_1)$ إلى موضع آخر $(س_2, ص_2)$ حيث $س_2 < س_1$ فإننا نلاحظ أنه حدث تغير في الإحداثيات ونجد أن: التغير في الإحداثي السيني $= س_2 - س_1$ ويسمى بالتغير الأفقي التغير في الإحداثي الصادي $= ص_2 - ص_1$ ويسمى بالتغير الرأسى (وهو يكون موجباً أو سالباً أو صفراً) وإذا قسمنا التغير الرأسى على التغير الأفقى فإننا نحصل على ما يسمى بميل الخط المستقيم

$$\text{أي أن ميل الخط المستقيم} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$$

$$\therefore \text{الميل "م"} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{فرق الصادين}}{\text{فرق السينين}} \text{ حيث } س_2 < س_1$$

ملاحظات

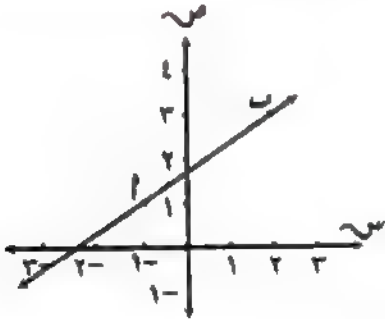
- إذا كان الميل = عدد موجب يكون شكل الخط المستقيم (يميل إلى اليمين)
- إذا كان الميل = عدد سالب يكون شكل الخط المستقيم (يميل إلى اليسار)
- إذا كان الميل = صفر يكون الخط المستقيم أفقى موازياً لمحور السينات
- إذا كان $س_2 - س_1 = 0$ يكون الخط المستقيم رأسى موازياً لمحور الصادات ونقول أن الميل غير معرف لأننا لا نستطيع حساب الميل إلا في حالة وجود تغير في الإحداثي السيني
- ميل الخط المستقيم ثابت لأي نقطتين عليه ويستخدم ذلك لإثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة

أمثلة توضيحية

١ أوجد ميل \vec{AB} مع التوضيح على الرسم إذا كان:

① $(1, 1) = A, (4, 4) = B$ ② $(2, 0) = A, (4, 2) = B$

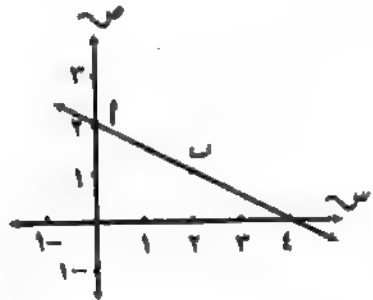
مع الحل



① ميل $\vec{AB} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{4 - 1}{4 - 1} = 1$

$\frac{4}{3} = \frac{1 - 3}{(1) - 2} =$

لنلاحظ: المستقيم يصعد لأعلى كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين



② ميل $\vec{AB} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{2 - 0}{4 - 2} = 1$

لنلاحظ: المستقيم يهبط لأسفل كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين

٢ أوجد ميل كل من:

- ① المستقيم المار بالنقطتين $(2, 3)$ و $(4, 4)$
- ② المستقيم المار بالنقطتين $(3, 1)$ و $(4, 5)$
- ③ المستقيم المار بالنقطتين $(3, 4)$ و $(4, 6)$
- ④ المستقيم المار بنقطة الأصل و بالنقطة $(2, 7)$
- ⑤ المستقيم الذى يقطع محور الصادات في النقطة $(0, 3)$ ومحور السينات في النقطة $(-2, 0)$
- ⑥ المستقيم المار بالنقطتين $(6, 1)$ و $(6, 3)$



إذا كان الخط المستقيم الذي يحتوي القطبين (٢،١)، (١،٠)

میلہ = $\frac{7}{4}$ تاوحد قیمت سے

الحل

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{2!}(x - a) + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^2 + \dots$$

٢٠٦-٢٠٧-٢٠٨-٢٠٩-٢١٠

1-5 2-3

$$\frac{1,000 - 1,000}{1,000 - 1,000} = 1$$

$$7 = 7 - 0 = 7$$

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 C_d A$$

فصل في التلويح

قريب (۱)

اعمل لإيجاد عمل الحقيقه انما بكل نعمتين في فعل مما يأتي :

① ۱ (۲۶۹) ، ب (۵۴۳) میراث = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

② $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ميل (۱۶۴) و (۲-۴۳) =

③ و (٤٠٣) : و (١٠٠) میں قدر = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

تَرْبِیَّہ (۲)

أكمل ما بقي لانت أن التفت $(0, -1) = ب$; $(-1, -1) = ج$; $(-1, 0) = د$.

عن الاستقامة واحدة

$$\frac{0.000000}{0.000000} = \frac{0.000000}{0.000000} = \frac{0.000000}{0.000000} = \frac{0.000000}{0.000000} = \frac{0.000000}{0.000000}$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

میل استقیم

۱. مل آں = و ہما مشترکات فی



$$r = \frac{1}{1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = 1 \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1) - 1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1} \quad (2)$$

$$\textcircled{2} \quad m = \frac{m_2 - m_1}{n_2 - n_1} = \frac{4 - 1}{9 - 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{y} = \frac{1-y}{1-y} = \frac{1-y-y^2+y^2}{1-y-y^2+y^2} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1-y}{(1-y)-1} = \frac{1-y}{1-y-1} = 1 \quad \odot$$

② ۲ = $\frac{1-2}{1-1} = \frac{1-2}{1-1} = \frac{1-2}{1-1} = 2$ غیر معرف (مستقیم راسی)

أفيد أن النقط (٣٠٠) ، ب (٥٠١) ، هـ (١٠١-)

تقع على استقامة واحدة

مجلس

لكي تكون النقطة A, B, C على استقامة واحدة يجب أن يكون :

میل آت = میل ب د

$$\boxed{2} = \frac{2-1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ میل} \quad \boxed{2} = \frac{2}{1} = \frac{2-0}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty \text{ میل}$$

∴ ميل \overline{AB} = ميل \overline{BC} وهما مشتركان في النقطة B

١٠٠

١٠١

١٠٢

١٠٣

١٠٤

١٠٥

١٠٦

١٠٧

١٠٨

١٠٩

١١٠

١١١

١١٢

١١٣

١١٤

١١٥

١١٦

١١٧

١١٨

١١٩

١٢٠

١٢١

١٢٢

١٢٣

١٢٤

١٢٥

١٢٦

١٢٧

١٢٨

١٢٩

١٣٠

١٣١

١٣٢

١٣٣

١٣٤

١٣٥

١٣٦

١٣٧

١٣٨

١٣٩

١٤٠

١٤١

١٤٢

١٤٣

١٤٤

١٤٥

١٤٦

١٤٧

١٤٨

١٤٩

١٥٠

١٥١

١٥٢

١٥٣

١٥٤

١٥٥

١٥٦

١٥٧

١٥٨

١٥٩

١٦٠

١٦١

١٦٢

١٦٣

١٦٤

١٦٥

١٦٦

١٦٧

١٦٨

١٦٩

١٧٠

١٧١

١٧٢

١٧٣

١٧٤

١٧٥

١٧٦

١٧٧

١٧٨

١٧٩

١٨٠

١٨١

١٨٢

١٨٣

١٨٤

١٨٥

١٨٦

١٨٧

١٨٨

١٨٩

١٩٠

١٩١

١٩٢

١٩٣

١٩٤

١٩٥

١٩٦

١٩٧

١٩٨

١٩٩

٢٠٠

٢٠١

٢٠٢

٢٠٣

٢٠٤

٢٠٥

٢٠٦

٢٠٧

٢٠٨

٢٠٩

٢١٠

٢١١

٢١٢

٢١٣

٢١٤

٢١٥

٢١٦

٢١٧

٢١٨

٢١٩

٢٢٠

٢٢١

٢٢٢

٢٢٣

٢٢٤

٢٢٥

٢٢٦

٢٢٧

٢٢٨

٢٢٩

٢٣٠

٢٣١

٢٣٢

٢٣٣

٢٣٤

٢٣٥

٢٣٦

٢٣٧

٢٣٨

٢٣٩

٢٤٠

٢٤١

٢٤٢

٢٤٣

٢٤٤

٢٤٥

٢٤٦

٢٤٧

٢٤٨

٢٤٩

٢٥٠

٢٥١

٢٥٢

٢٥٣

٢٥٤

٢٥٥

٢٥٦

٢٥٧

٢٥٨

٢٥٩

٢٦٠

٢٦١

٢٦٢

٢٦٣

٢٦٤

٢٦٥

٢٦٦

٢٦٧

٢٦٨

٢٦٩

٢٧٠

٢٧١

٢٧٢

٢٧٣

٢٧٤

٢٧٥

٢٧٦

٢٧٧

٢٧٨

٢٧٩

٢٨٠

٢٨١

٢٨٢

٢٨٣

٢٨٤

٢٨٥

٢٨٦

٢٨٧

٢٨٨

٢٨٩

٢٩٠

٢٩١

٢٩٢

٢٩٣

٢٩٤

٢٩٥

٢٩٦

٢٩٧

٢٩٨

٢٩٩

٣٠٠

٣٠١

٣٠٢

٣٠٣

٣٠٤

٣٠٥

٣٠٦

٣٠٧

٣٠٨

٣٠٩

٣١٠

٣١١

٣١٢

٣١٣

٣١٤

٣١٥

٣١٦

٣١٧

٣١٨

٣١٩

٣٢٠

٣٢١

٣٢٢

٣٢٣

٣٢٤

٣٢٥

٣٢٦

٣٢٧

٣٢٨

٣٢٩

٣٣٠

٣٣١

٣٣٢

٣٣٣

٣٣٤

٣٣٥

٣٣٦

٣٣٧

٣٣٨

٣٣٩

٣٤٠

٣٤١

٣٤٢

٣٤٣

٣٤٤

٣٤٥

٣٤٦

٣٤٧

٣٤٨

٣٤٩

٣٥٠

٣٥١

٣٥٢

٣٥٣

٣٥٤

٣٥٥

٣٥٦

٣٥٧

٣٥٨

٣٥٩

٣٦٠

٣٦١

٣٦٢

٣٦٣

٣٦٤

٣٦٥

٣٦٦

٣٦٧

٣٦٨

٣٦٩

٣٧٠

٣٧١

٣٧٢

٣٧٣

٣٧٤

٣٧٥

٣٧٦

٣٧٧

٣٧٨

٣٧٩

٣٨٠

٣٨١

٣٨٢

٣٨٣

٣٨٤

٣٨٥

٣٨٦

٣٨٧

٣٨٨

٣٨٩

٣٩٠

٣٩١

٣٩٢

٣٩٣

٣٩٤

٣٩٥

٣٩٦

٣٩٧

٣٩٨

٣٩٩

٤٠٠

٤٠١

٤٠٢

٤٠٣

٤٠٤

٤٠٥

٤٠٦

٤٠٧

٤٠٨

٤٠٩

٤١٠

٤١١

٤١٢

٤١٣

٤١٤

٤١٥

٤١٦

٤١٧

٤١٨

٤١٩

٤٢٠

٤٢١

٤٢٢

٤٢٣

٤٢٤

٤٢٥

٤٢٦

٤٢٧

٤٢٨

٤٢٩

٤٣٠

٤٣١

٤٣٢

٤٣٣

٤٣٤

٤٣٥

٤٣٦

٤٣٧

٤٣٨

٤٣٩

٤٤٠

٤٤١

٤٤٢

٤٤٣

٤٤٤

٤٤٥

٤٤٦

٤٤٧

٤٤٨

٤٤٩

٤٥٠

٤٥١

٤٥٢

٤٥٣

٤٥٤

٤٥٥

٤٥٦

٤٥٧

٤٥٨

٤٥٩

٤٦٠

٤٦١

٤٦٢

٤٦٣

٤٦٤

٤٦٥

٤٦٦

٤٦٧

٤٦٨

٤٦٩

٤٧٠

٤٧١

٤



اختبار
تراكبي
(٩)

ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي :

- ١) مجموعة حل المعادلة $-3 \geq -2$ في \mathbb{R} هي
- ٢) حجم الكرة التي طول نصف قطرها ٣ هو
- ٣) $[-4, 1] - [-4, 1] =$
- ٤) $81\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ في أبسط صورة هي

٤ درجات

(ب) إذا كان $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} =$ من
 فتاوجد قيمة $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

٣ درجات

(ج) كرة من المعدن طول نصف قطرها ١٦,٨ سم صهرت وصنع من
 مادتها المنصهرة ٤ مكرات متساوية الحجم أوهد طول نصف قطر كل كرة

٣ درجات

ثانياً: اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢) أوهد ميل المستقيم الخارج لكل زوج من النقاط التالية :

- ١) $(1, 2), (3, 1)$ ٢) $(1, 1), (2, -2)$ ٣) $(4, 3), (5, 0)$
- ٤) $(-2, 3), (4, -5)$ ٥) $(1, 2), (4, 3)$ ٦) $(1, 5), (5, 1)$
- ٧) $(5, 2), (5, 3)$ ٨) $(2, 3), (5, 0)$ ٩) $(1, 6), (3, 7)$

٢) أكمل كل مما يأتي :

- ١) ميل الخط المستقيم =
- ٢) إذا كانت $l = (1, 2)$ ، $b = (4, 3)$ فإن ميل \vec{AB} =
- ٣) إذا كان $l = (3, 1)$ ، $b = (1, 2)$ فإن ميل \vec{AB} =
- ٤) أي مستقيم يوازي محور السينات ميله =
- ٥) أي مستقيم يوازي محور الصادات ميله =
- ٦) إذا كانت l, b, c على استقامة واحدة فإن ميل \vec{AB} = ميل

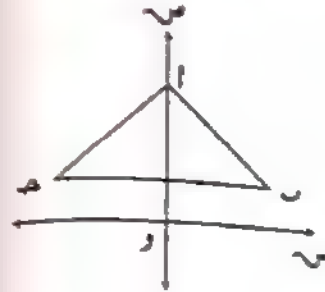
٤) أوهد ميل كلا من :

- ١) المستقيم الخارج بالنقطتين $A(2, -5)$ ، $B(4, -3)$ [١]
- ٢) المستقيم الخارج بالنقطتين $h(3, -8)$ ، $g(2, -8)$ [١]
- ٣) المستقيم الخارج بنقطة الأصل والنقطة $(3, 1)$ $[\frac{1}{2}]$
- ٤) المستقيم الذي يقطع محور الصادات في النقطة $(0, 6)$ [١]
- ويقطع محور السينات في النقطة $(-3, 0)$ [١]



مسائل المستوى الثاني

٥. فو الشكل المقابل :



ا ب هـ مثلث

أكمل ما يأتي باستخدام أحد الكلمات

(موجب أو سالب أو صفر أو غير معرف)

- ١ ميل \overrightarrow{AB} ٢ ميل \overrightarrow{BC}
٣ ميل \overrightarrow{AC} ٤ ميل \overrightarrow{AH}

٦. اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١. المستقيم المار بالنقطتين $(4, 5)$ ، $(3, 5)$

[افتر \vec{u} رأس \vec{u} يمر بنقطة الأصل \vec{u} غير ذلك]

٢. إذا كانت النقطة $(2, 2)$ تقع على المستقيم الذي ميله $2 =$

فإن النقطة التي تقع على نفس المستقيم هي

[$(4, 4)$ $(4, 3)$ $(4, 2)$ $(4, 1)$]

٣. إذا كان ميل المستقيم الذي يحتوي النقطتين $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ يساوي $2 =$

فإن $3 =$ [3 1 7 $7 -$]

٤. مستقيم يمر بالنقطتين $(1, 0)$ ، $(0, 3)$ فإن ميله $=$

[$\frac{1}{3}$ 3 $ك$ صفر $1 - \frac{1}{3}$]

٥. ميل أي خط مستقيم افتر يكون

[عدد سب $ك$ عدد موجب $ك$ صفر $ك$ غير معرف]

٦. إذا كان ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ $\frac{1}{3} =$

فإن $3 =$ [2 3 $ك$ 1 0]



٧. في صلا مما يأتي أثبت أن النقط 1 ، 2 ، 3 هـ تقع على استقامة واحدة :

١. $(1, -2)$ ، $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ هـ

٢. $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 3)$ هـ

٣. $(2, 2)$ ، $(1, 3)$ ، $(0, 4)$ هـ

٨. إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(2, 5)$ $5 =$ فأوجد قيمة 5

٩. أوجد قيمة $ك$ إذا كان :

١. ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(3, 3)$ يساوي 3 هـ

٢. ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يساوي 5 هـ

٣. $(1, -3)$ ، $3 =$ $ك$ ، $1 =$ $ك$ وكان ميل $\overrightarrow{AB} = 2 -$ هـ

٤. المستقيم يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(1, 1)$ هـ ويوازي محور السينات هـ

٥. المستقيم يمر بالنقطتين $(3, 5)$ ، $(1, 3)$ هـ ويوازي محور الصادات هـ

١٠. أثبت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(1, 1)$ يساوي

ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3, 3)$ ، $(2, 5)$ هـ

مسائل التفريق

١١. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الواصل بين النقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٢. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٣. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٤. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٥. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٦. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٧. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

١٨. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

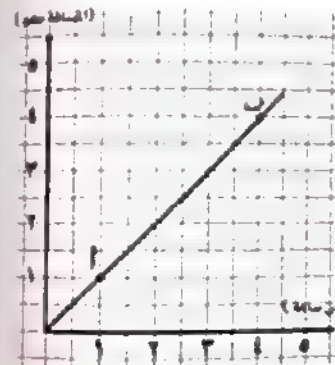
١٩. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

٢٠. أوجد قيمة $ك$ بحيث يكون المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 3)$ ، $(3, 5)$ يوازي محور السينات هـ

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

سوف ندرس بعض التطبيقات الحياتية كتطبيق على العلاقة بين متغيرين مثل العلاقة بين أطوال الأشخاص وأعمارهم ، والعلاقة بين كمية الوقود والمسافة التي تقطعها سيارة أو دراسة حركة سيارة ومعرفة العلاقة بين المسافة التي تقطعها والزمن اللازم لذلك وغيره

مثلاً :



إذا تحرك جسم من مكان ما وليكن نقطة أ ووصل إلى مكان آخر وليكن نقطة ب في خط مستقيم فإنه يمكن إيجاد العلاقة بين المسافة التي يمكن أن يقطعها وبين الزمن الذي يستغرقه لقطع هذه المسافة بإيجاد ميل هذا الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذي يعبر عن تزايد المسافة خلال مدة معينة

$$\text{حيث الميل} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{\text{التغير في الإحداثي الصادي}}{\text{التغير في الإحداثي السيني}}$$

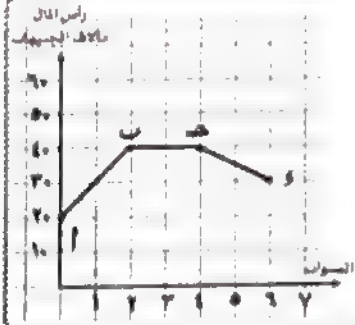
وإذا كان الجسم يقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية قيل أن الجسم يتحرك بسرعة منتظمة والذي يحددها هذا الميل أي أن السرعة المنتظمة "ع" = ميل الخط المستقيم الذي يمثل العلاقة بين المسافة والزمن بشرط أن تكون العلاقة تمثل جزء من خط مستقيم أما إذا كان عدة قطع مستقيمة ولا تمثل خط مستقيم واحد فإنه يمكن إيجاد

$$\text{السرعة المتوسطة للجسم حيث السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافات الكلية}}{\text{الزمن الكلي الذي قطعت فيه المسافات}}$$

وفيما يلي سوف ندرس أمثلة على هذه التطبيقات :

أمثلة توضيحية

الشكل البياني المقابل :



يوضح تفسير رأس مال

شركة خلال 6 سنوات

① أوجد ميل كل من \vec{AB} ، \vec{BC} ، \vec{CD}

وما دلالة كل منها ؟

② احس رأس مال الشركة عند بدء عملها

الحل

$$1 = (20, 0) ، 2 = (40, 2) ، 3 = (40, 4) ، 4 = (30, 6)$$

$$\text{① ميل } \vec{AB} = \frac{20 - 0}{2 - 0} = 10 \text{ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة}$$

خلال السنتين الأولتين بمعدل 10 آلاف جنيه (أي 10 آلاف جنيه لكل سنة)

$$\text{ميل } \vec{BC} = \frac{40 - 40}{4 - 2} = 0 \text{ صفر وهو يعني أن رأس مال الشركة كان ثابتاً}$$

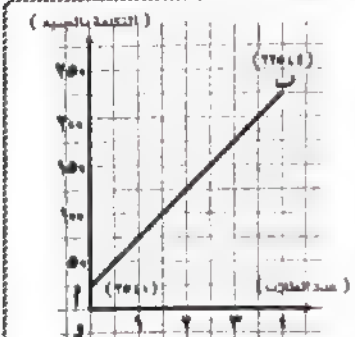
خلال السنتين الثالثة والرابعة

$$\text{ميل } \vec{CD} = \frac{30 - 40}{6 - 4} = -5 \text{ وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة}$$

خلال السنتين الأخيرتين بمعدل 5 آلاف جنيه (أي 5 آلاف جنيه لكل سنة)

$$\text{② رأس مال الشركة عند بدء العمل} = \text{الإحداثي الصادي عند } 0 = 20 \text{ ألف جنيه}$$

الشكل البياني المقابل :



يمثل العلاقة بين تكلفة

رحلة مدرسية ما بالجنه

وعدد الطلاب المشتركين أوجد :

① تكلفة الطالب

② المبلغ الثابت الذي تدفعه

المدرسة لحجز موعد -



تخطيط حياتية عام، عبد الخط المستقيم



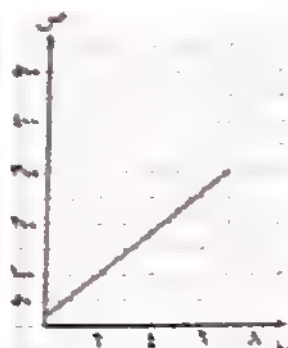
المعباد بمبلغ معين، فهذا ضمن الشكل الميموني

المقابل يمثل العلاقة بين عدد التجمعات

المعينة (س) والمبلغ المدفوع بالتقروش (ص)

أوجد: ① ثمن الزجاجية المعبأة

② ثمن خدمة الجيب



بسم الله

① ثمن الزجاجة المعيبة = ميل المستقيم = التغير في المبلغ المدفوع
التغير المناظر في عدد الحاجات

$$\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} =$$

② ثمن خدمة البيع = المبلغ المطلوب (عندما س = صفر)

= طول الجزء المقطوع من محور $x = 10$ فرش

الشكل البياني المقابل :

يمثل حركة دراجة مقبسة

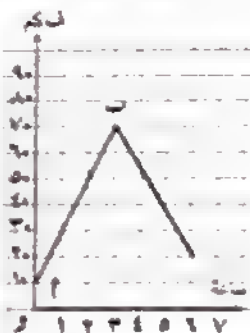
من نقطة الى نقطة

① عين السرعة المنتظمة خلال

الماءات الثلاثة الأولى

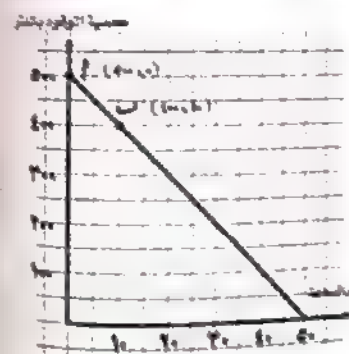
٢٠٢٠ عین الجرعة المنظمة خلال

المعاملات الثلاثة الثانية



٣) ما بعد الميمنة عن نقطة "و" عند بدء قياس الزمن

④ ما بعد الحيرة من نقطة "و" بعد ٩ ساعات من بدء قياس الزمن



أي أنه بعد n ساعات تكون نقطة $B = (1, 1)$

ونرى في الشكل البياني حيث يمثل

محور الصناديق كمية الوقت بالتر

ويمثل محور السينات الزمن بالساعات

وتمثل النقطتين $A = (50, 0)$ ، $B = (40, 10)$

و تفصل بينهما بخط مستقيم يمثل العلاقة

$$f_0 = \frac{f_{100} - f_0}{t_0 - t_0} = \frac{2000 - 0}{100 - 0} = 20 \text{ میل}$$

وهذا الميل يعنى أن كمية الوقود بالحذاء 33

الزمن اللازم حتى يفرض الخ

أي عند نقطة تقاطع الخط المستقيم

١٠٠٠ ساعة

أويســــــــــــــاوى
معدل النفاذ

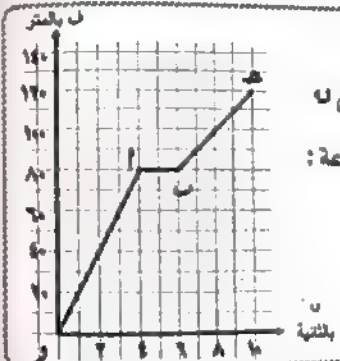


الحل

- ① خلال الثلاث ساعات الأولى (١٠، ٠) ب (٧٠، ٣) ع $\therefore \frac{70-0}{3-0} = \frac{70}{3} = 23 \frac{1}{3}$ كم / ساعة
- ② خلال الثلاث ساعات التالية ع $\therefore \frac{70-20}{3-6} = \frac{50}{-3} = -16 \frac{2}{3}$ كم / ساعة
- لاحظ أن السرعة السالبة تعني أن الدراجة تسير في الاتجاه المضاد لحركته
- في الثلاث ساعات الأولى بسرعة $\frac{50}{3}$ كم / ساعة
- ③ من الرسم بعد الدراجة عن نقطة "و" عند بدء قياس الزمن = ١٠ كم
- ④ من الرسم بعد الدراجة عن نقطة "و" بعد ٦ ساعات من بدء قياس الزمن = ٢٠ كم



الشكل البياني المقابل:



يمثل العلاقة بين المسافة d بالمتري والزمن t بالثواني لطائر ما المطلوب إيجاد السرعة:

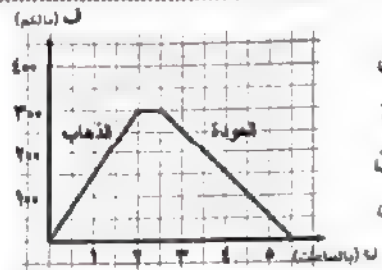
- ① خلال الأربع ثوان الأولى
- ② خلال الثانيةين التاليتين
- ③ خلال الأربع ثوان الأخيرة

الحل

- ① السرعة خلال الأربع ثوان الأولى أي من نقطة و (٠، ٠) إلى أ (٨٠، ٤) ع $\therefore \frac{80-0}{4-0} = \frac{80}{4} = 20$ متر / ث
- ② السرعة خلال الثانيةين التاليتين أي من نقطة أ (٨٠، ٤) إلى ب (٨٠، ٦) ع $\therefore \frac{80-80}{6-4} = \frac{0}{2} = 0$ صفر أي أن الطائر يظل ساكناً خلال الثانيةين التاليتين
- ③ السرعة خلال الأربع ثوان الأخيرة أي من نقطة ب (٨٠، ٦) إلى هـ (١٢٠، ١٠) ع $\therefore \frac{120-80}{10-6} = \frac{40}{4} = 10$ متر / ث



الشكل البياني المقابل:



يوضح العلاقة بين المسافة d بالكيلومتر والزمن t بالساعة لقطار تحرك بسرعة منتظمة من الوجه البحري إلى الوجه القبلي ذهاباً وعودة

- ① ما مقدار السرعة المنتظمة في كل من المرحلتين ؟
- ② بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل ؟

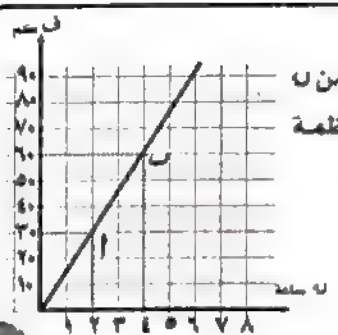
الحل

- ① السرعة خلال الذهاب $\therefore \frac{300-0}{2-0} = \frac{300}{2} = 150$ كم / ساعة
- السرعة خلال العودة $\therefore \frac{300-0}{3-5} = \frac{300}{-2} = -150$ كم / ساعة
- و الإشارة السالبة تعني أن القطار يتحرك في الاتجاه المعاكس لحركته الأولى أي أن السرعة = ١٥٠ كم / ساعة في الاتجاه المعاكس لحركته الأولى
- ② القطعة المستقيمة الأفقية تبين أن القطار توقف عن الحركة لمدة نصف ساعة وقضى هذا الوقت في المحطة الأخيرة ثم تحرك عائداً إلى نقطة البداية

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

الشكل البياني المقابل:



يوضح العلاقة بين المسافة d بالكم والزمن t بالساعة لدراجة تتحرك بسرعة منتظمة أوجد سرعة الدراجة

الحل

$$\therefore \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 - 0}{2 - 0} = \frac{40}{2} = 20 \text{ كم / ساعة}$$

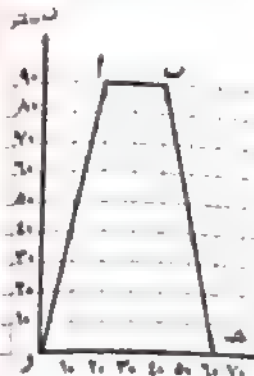




تدريب (٢)

الشكل البياني المقابل :

يوضح حركة دراجة حيث
الزمن t بالثانية ، المسافة s بالتر
فاكمل ما يأتي :



① سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية الأولى

أي من نقطة $ر = (٠, ٠)$ إلى $ا = (٢٠, ٩٠)$

$$\therefore ع = \frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{٩٠ - ٠}{٢٠ - ٠} = \frac{٩٠}{٢٠} = ٤.٥ \text{ متر/ثانية}$$

② سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية التالية أي من $ا = (٢٠, ٩٠)$ إلى $ب = (٤٠, ٩٠)$

$$\therefore ع = \frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{٩٠ - ٩٠}{٤٠ - ٢٠} = \frac{٠}{٢٠} = ٠ \text{ م/ث}$$

وهذا يعني أن

③ سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية الأخيرة أي من $ب = (٤٠, ٩٠)$ إلى $هـ = (٦٠, ٠)$

$$\therefore ع = \frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{٠ - ٩٠}{٦٠ - ٤٠} = \frac{-٩٠}{٢٠} = -٤.٥ \text{ م/ث}$$

وهذا يعني أن



اطلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية وجميع المراحل

يحتوي على شرح كامل بالتفصيل يساعد وفي الأمر على الفهم
ويساعد المعلم على الشرح ويساعد الطالب على التدريب



نماذج (١٢) على تطبيقات حياتية على الخط المستقيم

مسألة الدراجة

١/ ساعة امتحان ومراجعة



أولاً : راجع هذا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي :

① $\{٥, ٢\} - \{٥, ٢\} = \{٥, ٢\}$

② مجموعة حل المتباينة $٢ \leq x \leq ١$ هي \emptyset

③ $\sqrt[٣]{٦٤} - \sqrt[٣]{٢٧} = ٢ - ٣ = -١$ في أبسط صورة =

④ إذا كان $(٢, ٤)$ يحقق العلاقة $٢ + x = ٥$ فإن $٤ =$

٤ أرجو

(ب) إذا كانت $٢٧ + ٥٧ =$ ، $٢٧ - ٥٧ =$ م

قاعدة في أبسط صورة قيمة المقدار $\frac{٢٧ + ٥٧}{٢٧ - ٥٧}$

٣ أرجو

(هـ) اسطوانة دائرية قائمة قائمتها ٧٢π وارتفاعها ٨

أوجد مساحتها الكلية بدلالة π

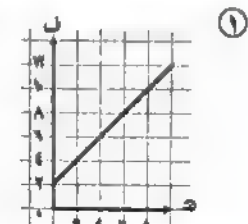
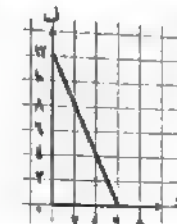
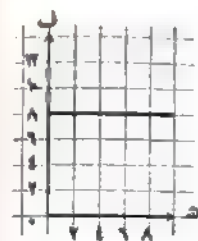
٣ أرجو



ثانياً : اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ كل من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن هـ (بالثانية) لجسم ما، حدد موضع الجسم عند بدأ الحركة وعند $h = 6$ ثواني وأوجد ميل المستقيم في كل حالة ماذا يمثل الميل ؟



٣ الشكل البياني المقابل :

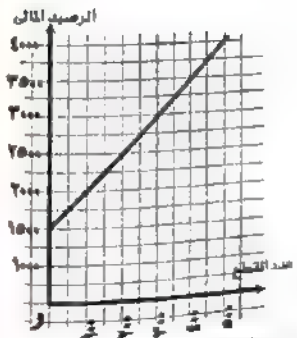
يمثل حركة دراجة
تسير بسرعة منتظمة
أوجد سرعة الدراجة



٤ الشكل البياني المقابل :

يوضح العلاقة بين عدد القطع المباعة من سلعة ما وقيمة الرصيد المالي للتاجر

- أوجد الرصيد المالي للتاجر قبل البيع ؟
- ما رصيد التاجر بعد بيع ٢٠٠ قطعة ؟
- ما عدد القطع المباعة إذا بلغ رصيد التاجر ٤٠٠٠ جنيه ؟



٥ موتور لرفع المياه يقوم برفع المياه لخزان عمارة علوى حجمه ١٠٠ لتر مكعب بمعدل ثابت والشكل البياني المقابل يمثل العلاقة بين حجم المياه بالخزان (ص) باللتر والزمن اللازم لملئه (س) بالثانية ، أوجد :

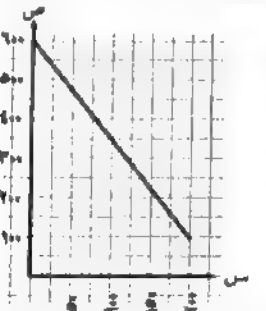
- معدل الزيادة في حجم الماء كل دقيقة ؟
- حجم المياه بالخزان بعد ١٠ دقائق ؟
- متى يمتلئ الخزان بالماء ؟



٦ الشكل البياني المقابل :

يمثل العلاقة بين المسافة التي تقطعها طائرة في أحد رحلاتها (س) بالكيلومتر وحجم الوقود المتبقى في خزاناتها باللتر (ص) أوجد :

- أكبر سعة لخزانات الوقود ؟
- حجم الوقود المتبقى في نهاية الرحلة ؟
- متوسط استهلاك الوقود لكل كيلو متر ؟

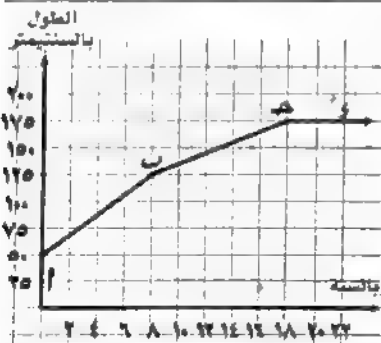


مسائل المستوى الثاني

٧ الشكل البياني المقابل :

يوضح العلاقة بين طول شخص بالسنتيمترات وعمره بالسنوات

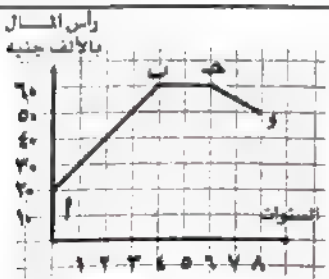
- أوجد ميل كل من \vec{AB} ، \vec{BC} ، \vec{CD} وما دلالة كل منها ؟
- احسب الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٢٢ سنة وطوله عندما كان عمره ٨ سنوات



٨ الشكل البياني المقابل :

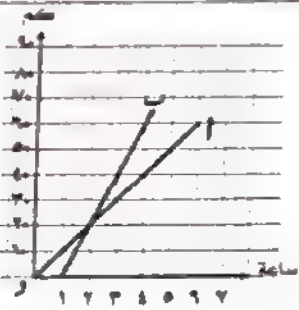
يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات

- أوجد ميل كل من \vec{AB} ، \vec{BC} ، \vec{CD} وما دلالة كل منها ؟
- احسب رأس مال الشركة عند بدأ عملها ؟



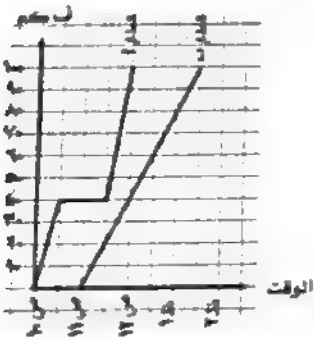


الشكل البياني المقابل :



- يمثل العلاقة بين المسافة بالكيلومترات والزمن بالساعات لحركة سيارتين ١، ٢
- ١ أوجد سرعة كل من السيارتين
 - ٢ كم تكون المسافة بين السيارتين بعد مرور ٤ ساعات من بدء حركة السيارة ٢ ؟

الشكل البياني المقابل :



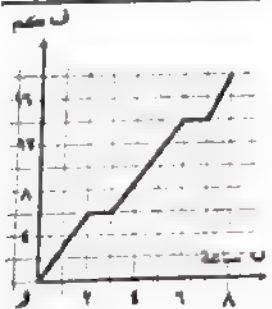
- يوضح العلاقة بين المسافة ف والزمن س لحركة قطارين ١، ٢ بين محطتين حيث ف (بالكيلومتر) و س (بالساعة) استلهم الرسم لإيجاد قيمة :
- ١ البعد بين المحطتين
 - ٢ الزمن الذي استغرقه كل من القطارين
 - ٣ السرعة المتوسطة لكل منهما
 - ٤ ما دلالة القطعة المستقيمة في حركة القطار ١



مسائل التفوقين

- ١٥ تحركت دراجة بخارية فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد ٢ كم من نقطة معينة ١ وبعد ٣ دقائق أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة اوسعهم شكلاً بيانياً يمثل هذه الحركة و من الرسم أوجد :
- ١ سرعة الدراجة
 - ٢ بعد نقطة البداية للدراجة عن نقطة ١

الشكل البياني المقابل :



- يوضح خط سير شخص ما خلال رحلة
- ١ ما الفترة التي تحرك فيها الشخص بأقصى سرعة ؟
 - ٢ ما السرعة المتوسطة لحركة الشخص خلال الرحلة ؟
 - ٣ ما متوسط السرعات خلال الرحلة ؟

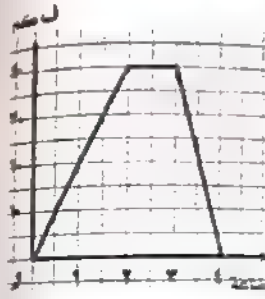


٩ الشكل البياني المقابل :



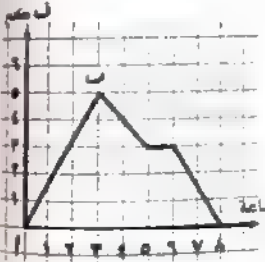
- يمثل حركة دراجة مقيمة من نقطة ثابتة ١ أوجد :
- ١ السرعة المنتظمة للدراجة خلال الساعات الثلاثة الأولى
 - ٢ السرعة المنتظمة للدراجة خلال الساعات الأربعة التالية
 - ٣ المسافة الكلية التي تحركتها الدراجة

١٠ الشكل البياني المقابل :



- يمثل حركة راكب دراجة يحمل بضاعة ليسلمها إلى متجر ما و كان يسير بسرعة منتظمة أوجد :
- ١ سرعته خلال الساعتين الأولتين
 - ٢ سرعته خلال الساعة الأخيرة
 - ٣ لماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل

١١ الشكل البياني المقابل :



- يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلومتر والزمن بالساعة لدراجة بخارية تحركت بين مدينتين ١، ٢ ذهاباً وعودة اجب عما يأتي :
- ١ ما مقدار السرعة المنتظمة للدراجة أثناء رحلة الذهاب ؟
 - ٢ ما مقدار السرعة المتوسطة أثناء العودة ؟
 - ٣ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية في الشكل ؟

١٢

- ملا حازم خزان سيارته بالوقود وسعة هذا الخزان ٤٠ لتراً وبعد أن تحرك ١٢٠ كم وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{3}{4}$ الخزان ، ارسم الشكل البياني الذي يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التي قطعها السيارة (علماً بأن هذه العلاقة خطية) ، واحسب المسافة التي تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان



جمع البيانات وتنظيمها

الوحدة الثالثة

- لدراسة ظاهرة أو مشكلة ما نصل لطرق علاجها يلزم تجميع بيانات حول هذه الظاهرة أو المشكلة محل الدراسة
- ونلاحظ عند جمع البيانات أنها تنقسم إلى قسمين:
 - (١) بيانات كمية: وهي التي تكون في صورة أعداد مثل: عدد التلاميذ - عدد الكتب - عدد المدارس - السن - الوزن - الأجور
 - (٢) بيانات وصفية: وهي التي تكون في صورة صفات مثل: الحالة الاجتماعية (أعزب - متزوج - أرمل - ...)، الجنس (ذكر - أنثى)، تقديرات (ممتاز - جيد - جيد جداً - مقبول - ...)، وسائل المواصلات (موترو - سيارة - دراجة - ...)

- ولجمع البيانات فإنه يمكن جمعها في صورة:
 - بيانات ابتدائية: من طريق استبيان أو كشوف الملاحظة
 - بيانات ثانوية: عن طريق مصادر مثل الإنترنت، الكتب، الوثائق، النشرات الإحصائية
 - بيانات تجريبية: عن طريق التجارب واختبار صحة نظرية ما
- وتعرض البيانات التي نصل إليها يلزم تنظيمها وعرضها بطريقة تساعد على الاستفادة منها ويتم تنظيم وترتيب البيانات في جداول تسهل استنتاج المعلومات ومن هذه الجداول "الجدول التكراري"

- وقد درسنا الجداول التكرارية البسيطة العام السابق والتي تستخدم لعرض الأعداد الصغيرة والبسيطة، ولكن في أحيان كثيرة تكون البيانات الإحصائية أعداد كبيرة مثل أجور الموظفين، ودرجات الطلاب في الثانوية العامة وتنظيم هذه البيانات في جداول تكرارية بسيطة يجعلها كبيرة جداً لذلك نلجأ إلى الجداول التكرارية ذي المجموعات
- وفيما يلي سوف نوضح من خلال المثال كيفية تنظيم البيانات وعرضها في جدول تكراري ذي مجموعات:



أمثلة توضيحية

فيما يلي عدد أيام الغياب لمجموعة من الطلبة بأحد المدارس وعددهم ٤٠ طالب والمطلوب عمل الجدول التكراري ذي المجموعات

١٤	٢٣	١٨	٢١	٢٦	١٧	٣٠	٦	٢١	١٠
١٧	٢٧	١٣	٢٢	٥	٢٨	١٥	١١	٢٠	٣٢
٢٤	٧	٢٢	١٦	٢٠	١٢	٢١	١٦	٢٥	١٥
١٩	٢٥	٢٦	١١	٢٥	٢٣	١٨	٢٢	٢٩	٢٤

الحل

لتكوين الجدول التكراري ذي المجموعات تتبع الخطوات التالية:

الغياب	العلامات	التكرار
٥	///	٣
١٠	/ ////	٦
١٥	//// ////	٩
٢٠	//// ////	١٢
٢٥	/// ////	٨
٣٠	//	٢
المجموع		٤٠

- نوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة لهذه البيانات فنجد أن أصغر عدد لأيام الغياب هو ٥ وأكبر عدد هو ٣٢
- أي أن قيم الجدول تبدأ من ٥ وتنتهي عند ٣٢ والفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة يسمى المدى أي أن $\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة}$

$$\therefore \text{المدى} = 32 - 5 = 27$$

- نجزي المدى إلى عدد مناسب من المجموعات وليكن ٦ مجموعات منفصلة ومتساوية الطول

$$\therefore \text{مدى (طول) المجموعة} = \frac{27}{6} = 4,5 \approx 5$$

أي أن كل مجموعة تحتوي على ٥ أعداد فالمجموعة الأولى مثلاً تحتوي الأعداد ٥ (أصغر قيمة) ٦، ٧، ٨، ٩ ونكتب "٥ -" وتعني مجموعة البيانات الأكبر من أو تساوي ٥ والأقل من ١٠، والمجموعة الثانية تحتوي العناصر ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤ ونكتب "١٠ -" وهكذا



٦) فيما يلي بيان لدرجات الحرارة المئوية في ٤٠ مدينة في أحد أيام السنة

١٢	٢٨	١٦	٢٦	٣٠	٢٠	١٥	٢١	١٥	٢٧
٢٥	١٥	٣٠	٢٢	١٥	٢٧	١٥	٢٤	٢٢	٣٠
١٥	٣٠	٢٢	٢٢	٢٧	٢٨	٢٦	١٦	١٣	٢٦
١١	٢١	١٦	٢٨	٢١	٣٠	٢١	٢١	٢٥	٢٣

والمطلوب تكوين جدول لتوزيع تكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

٧) فيما يلي الأجر الأسبوعي بالجنهات لأربعين عاملاً في أحد المصانع

٤٧	٧١	٣٦	٩٤	٥٤	٦٤	٨٧	٨٩	٦٢	٥٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٢	٦٩	٣٦
٧٩	٤٨	٧٧	٩٠	٦٥	٩٩	٩٦	٦٧	٦٠	٥٥
٩٥	٧٥	٨١	٨٤	٧٨	٣٨	٤٩	٩٤	٤٨	٥٩

والمطلوب عمل جدول تكراري ذي مجموعات

(لك المجموعات الجزئية ٣٠ - ٤٠ - ٥٠ - ٥٠ - ٥٠ - ٥٠ - ٥٠ - ٥٠ - ٥٠ - ٥٠)

وما المجموعة التي بها أكبر تكرار ؟ وما المجموعة التي بها أقل تكرار ؟



مسائل المتفوقين

٨) فيما يلي أرباح السنة الأولى لعدد ٦٠ طالب ممن لديهم دفاتر توفير بالبريد

٥٠	٤٣	٥٥	٣١	٣٢	٤٨	٤١	٤٥	٥٦	٤٠
٦١	٤٣	٥١	٣٦	٤٠	٤٢	٣٠	٤٧	٤٥	٦٣
٢٢	٣٣	٥٣	٣٥	٣٧	٢١	٤٩	٥٩	٤٢	٥٦
٤٣	٥٣	٤٤	٥٣	٤٦	٣٣	٥٧	٣٥	٥٢	٤٥
٢٠	٤٧	٥٤	٦٥	٤٩	٣٧	٤٠	٤٢	٤٦	٤٤
٤٩	٣٢	٥٥	٤٦	٤٩	٥٨	٦٧	٣٤	٥٤	٣٩

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

ثانياً : اجيب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢) فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالباً في أحد الاختبارات

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨

مطلوب تكوين الجدول التكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

٣) فيما يلي عدد الطلاب الذين يترددون على مكتبة المدرسة خلال ٣٠ يوم

٢٣	٣٨	٣٠	٣٦	٤٦	٣٥	٢٧	٢٧	٤٨	٢٤
٢٨	٣٨	٤٤	٤٢	٢٤	٤٧	٢٨	٣٢	٤٠	٤٠
٣٤	٤٣	٥٠	٣٥	٢٠	٢٤	٤٠	٥٠	٢٢	٣٩

والمطلوب تكوين الجدول التكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

٤) فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالباً في أحد الاختبارات بمدرسة ما

٧	٨	٦	٧	١٣	٩	٨	٢	٧	٦
١٠	٥	٦	١٢	٠	٢	٧	٥	٣	٨
٧	٤	١٣	٤	١٢	٧	١١	١١	١٢	٩

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري متخذاً المجموعات ٠ - ٣٤ - ٦٤ - ١٠٠

مسائل المستوى الثاني

٥) فيما يلي بيانات الأجر الأسبوعي لعدد ٤٠ عاملاً في أحد المصانع

١٥	١٠	٢٤	٢٥	٢٢	١٦	٢١	٢٥	٢٣	١٧
٢٢	٣٧	١٦	٣٦	١١	٢٤	١٧	٢٢	١٨	٢١
١٩	٣٢	٢٦	٢١	١٥	٢٧	٣٣	١٢	٢٧	٢٥
٢٣	٢٦	١٨	٢٨	٢٣	١٦	٢٤	٢٠	١٩	١٧

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

الحصول التكراري للجمع الصاعد - مثال ١

و نهجه يائياً

مدرسة في التوزيع الصافي صهيبة لتعليم التكراري في الحصول التكراري في المجموع على

فبما: كل من مجموع التكراريات الخاصة بمرحلة صيد صيد التكراريات الخاصة بمرحلة

المجموع	١	٢	٣	٤	٥
عدد الطلاب	١	٢	٣	٤	٥

ولما أردت معرفة بعض المعلومات مثل عدد الطلاب الذين حصلوا على ٣٠ درجة فافترض

فأولاً يمكن أن نجمع هذه الطلاب الذين حصلوا على ٣٠ درجة والذين حصلوا على

أولاً من ٣٠ درجة لدرجة الإجابة

مجموع العر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الطلاب	١	٢	٣	٤	٥

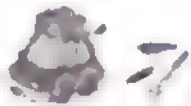
هذه الحصول التكراري في التوزيع التكراري لأعمار ٩٠ عاماً بأحد الصانع:

أولاً الحصول التكراري في التوزيع التكراري الصاعد والمساوي ثم

أولاً الحصول التكراري في التوزيع التكراري الصاعد والمساوي ومن الرسم أوجه:

(١) عدد العمال الذين تقل أعمارهم عن ١١ سنة

(٢) عدد العمال الذين عمرهم ٣٦ سنة فأكثر



لنكون الحصول التكراري للجمع الصاعد ونهجه يائياً نجمع الخطوات التالية

(١) تكون الحصول من جافيتي نكتب

في الأول الحصول العليا للمجموع من

و نكتب فيها المجموع من أول

مجموع ٢٥ إلى آخر مجموع

و نهجه آخر مجموع ١٥ - ٥٠

و نكتب قبل كل مجموع "أقل من"

والخطبة الثانية نكتب التكراري

الجمع الصاعد ونسباً "صفر"

و نهجه بمجموع التكراري

و نجمع صفر مع تكرار أول خطبة ثم نضيف للمجموع تكرار ثاني خطبة وهكذا

(نكتب هذه التكرارات على يسار الحصول لتبدأ منها في الجمع)

(٢) نكتب الحصول يائياً بأن نحصل

المحور الأفقي للمجموعات والمحور

الرأسي للتكراريات الصاعد

نختار مقياساً للرسم على المحورين

بحيث يتسع كل منقسمتين

التي سنكتب عليه

نكتب التكراريات الصاعد لكل

مجموعة ونصل بينهم بخط منحنى

ومن على المحور الأفقي عند العدد ١١ لرسم عموداً يقطع المنحنى في نقطة

و من هذه النقطة لرسم خطاً يوازي محور المجموعات بحيث يقطع

محور التكراريات في نقطة فيكون هو عند العمود المطلوب

و من الرسم نجد أن هذه العمال الذين يقل أعمارهم عن ١١ سنة ٣٩ عاملاً

و من الرسم نجد أن هذه العمال الذين يقل أعمارهم عن ١١ سنة ٣٩ عاملاً

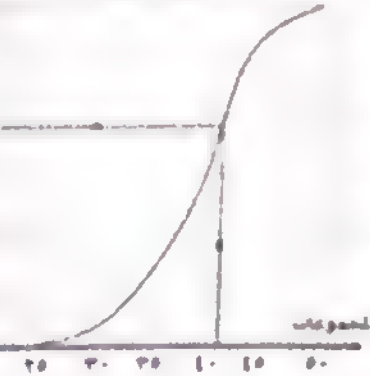
و من الرسم نجد أن هذه العمال الذين يقل أعمارهم عن ١١ سنة ٣٩ عاملاً

و من الرسم نجد أن هذه العمال الذين يقل أعمارهم عن ١١ سنة ٣٩ عاملاً

و من الرسم نجد أن هذه العمال الذين يقل أعمارهم عن ١١ سنة ٣٩ عاملاً

و من الرسم نجد أن هذه العمال الذين يقل أعمارهم عن ١١ سنة ٣٩ عاملاً

الحصول التكراري للجمع الصاعد



المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

المجموع

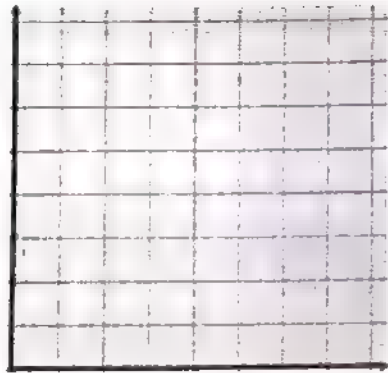
المجموع

المجموع



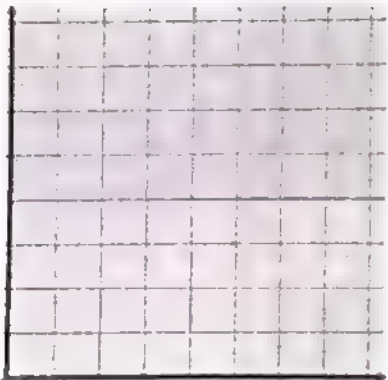
نوع العزل

الجدول التكراري المتجمع الصاعد



الحدود العليا للمجموعات	التكرار للمجموع الصاعد
أقل من ١٠	صفر
أقل من ٢٠
أقل من ٣٠
أقل من ٤٠
أقل من ٥٠
أقل من ٦٠	٤٠

الجدول التكراري المتجمع النازل

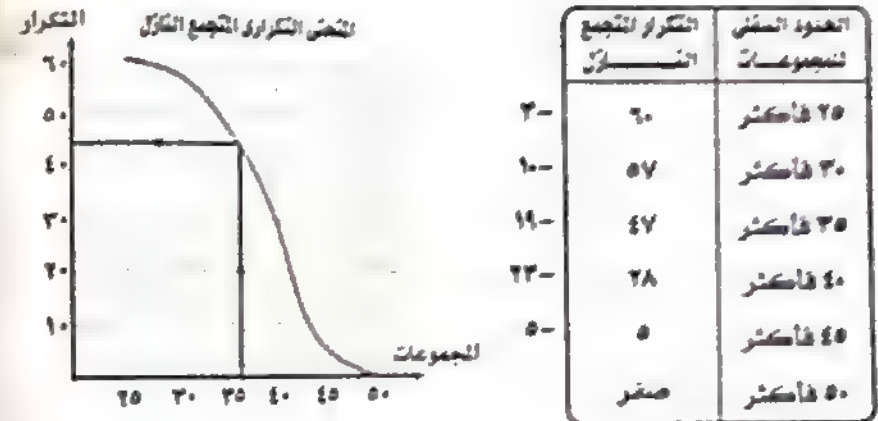


الحدود السفلى للمجموعات	التكرار للمجموع النازل
١٠ فأكثر	٤٠
٢٠ فأكثر
٣٠ فأكثر
٤٠ فأكثر
٥٠ فأكثر
٦٠ فأكثر



و تشكيل الجدول التكراري المتجمع النازل فإننا نتبع نفس الخطوات ولكن نكتب في الخانة الأولى للجدول الحدود السفلى للمجموعات ونكتب فيها المجموعات و بعدها " فأكثر " و الخانة الثانية نكتب التكرار المتجمع النازل و من اترسم نجد أن عدد الأعمال الذين عمر كل منهم ٣٦ سنة فأكثر = ٤٤ عاملاً و لاحظ أن التكرار المتجمع النازل يبدأ بمجموع التكرارات و ينتهي بالصفر كما يلي :

الجدول التكراري المتجمع النازل



أمثلة لتقريب

تقريب (١)

كون الجدولين التكراريين لتجمعين الصاعد و النازل للتوزيع التكراري الآتي ثم ارسم المنحنى التكراري لكل منهما

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠



ثانياً : اجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

٢ كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل للتوزيعات التكرارية الآتية ثم ارسم المنحنى التكراري لكل منهما

المجموع	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥	المجموعات
التكرار	٥٠	٨	١١	١٥	٩	٧

المجموع	-١٢	-١٠	-٨	-٦	-٤	-٢	المجموعات
التكرار	١٠٠	٢٥	١٥	٢٠	٥	١٠	٢٥

المجموع	-٥٥	-٥٠	-٤٥	-٤٠	-٣٥	-٣٠	-٢٥	-٢٠	المجموعات
التكرار	١٠٠	٦	١٠	١٥	٢٥	٢٠	١٠	٨	٦



مسائل المستوى الثاني

٣ الجدول الآتي يبين أوزان ٥٠ طفلاً بالكيلوجرامات

مجموعات الأوزان	-٦٥	-٥٥	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	عدد الأطفال
	٥٠	٥	١٠	١٥	١٠	٧	٣

- ١ كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد والهابط
- ٢ أوجد عدد الأطفال الذين يكون وزن كل منهم أقل من ١٥ كيلوجرام (سـ)
- ٣ أوجد عدد الأطفال الذين يكون وزن كل منهم ١٥ كيلوجرام فأكثر (سـ)
- ٤ أوجد عدد الأطفال الذين لا تقل أوزانهم عن ٣٥ كجم (سـ)



أسئلة الوزارة

تمارين (١٤) على الجدول التكراري المتجمع وتمثيله بيانياً

ساعة استن و مراجعة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١ (١) اكمل ما يأتي :

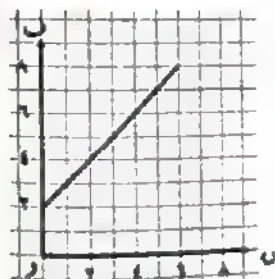
- ١ $[10, 20] \cap [0, 30] = \dots$
- ٢ مجموعة حل المتباينة $3 - 2 \geq 5 - 3$ هي \dots
- ٣ إذا كانت $3\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$ فإن قيمة $2 - \sqrt{2}$ هي \dots
- ٤ إذا كان حجم كرة π فإن طول نصف قطرها \dots

٤ درجات

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

٣ درجات

(جـ) الشكل المقابل يوضح العلاقة



- ١ بين المسافة (د) التي يقطعها جسم بالمتري خلال زمن (ت) بالثانية
- ٢ حدد موضع الجسم
- ٣ عند بدأ الحركة (ت) بعد ثواني
- ٤ أوجد ميل المستقيم المحدد لمسار الجسم

٣ درجات



٤ فيما يلي التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في أحد الاختبارات

مجموع الدرجات	-٥	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لهذا التوزيع ومن الرسم أوجد عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ١٠ درجات والذين تقل درجاتهم عن ١٤ درجة [٧٥٠٣٥]

٥ البيانات التالية لدرجات ١٠٠ طالب في امتحان تجريبي لمادة الرياضيات

المجموعات	-٥	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

والمطلوب:

- ١ تكوين كل من الجدول التكراري المتجمع الصاعد والنازل
- ٢ رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والنازل على نفس ورقة الرسم البياني
- ٣ من الرسم أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة والحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر
- ٤ ما النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة ؟
- ٥ ما النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على أكثر من ٤٥ درجة ؟

٦ الجدول الآتي يمثل التوزيع التكراري لأعمار ٥٠ عامل بأحد المصانع

المجموعات	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	المجموع
التكرار	٥	٨	٩	١٣	٥	٣	٥٠

والمطلوب:

- ١ اكتمال الجدول
- ٢ رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل لهذا التوزيع
- ٣ من الرسم أوجد :
 (١) عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٢ سنة
 (٢) عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٣ سنة



مسائل المتفوقين

٧ الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لأجور ١٠٠ عامل بالجنيه في اليوم في أحد المصانع

مجموعات الأجور	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	المجموع
عدد العمال	٣	٨	١٢	١٨	٢٦	٢٣	١٠	١٠٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والهابط واستخدم الرسم في إيجاد ما يلي :

- ١ كم عامل حصل على أقل من ١٢ جنية
- ٢ كم عامل حصل على ٨ جنيهات فأكثر
- ٣ كم عامل حصل على أقل من ٢٠ جنية
- ٤ كم عامل حصل على ١٢ جنية فأكثر
- ٥ كم عامل حصل على أقل من ٢٤ جنية
- ٦ كم عامل حصل على ١٦ جنية فأكثر
- ٧ كم عامل حصل على أقل من ٢٦ جنية
- ٨ كم عامل حصل على ٢٤ جنية فأكثر



اطلب الماهر في الرياضيات
للمرحلة الابتدائية وجميع المراحل

يحتوي على شرح كامل بالتفصيل يساعد ولي الأمر على الفهم
ويساعد المعلم على الشرح ويساعد الطالب على التدريب

يسعدنا تلقي ملاحظاتكم على موقعنا www.elmaher.org

مقاييس التفرقة المركزية الوسط الحسابي

بملاحظة الجداول التكرارية نجد أن التكرارات تبدأ صغيرة ثم تتزايد حتى تصل إلى نهاية عظمى (أعلى الدرجات) ثم تتناقص وهذا يعني أن عدداً كبيراً من التكرارات يترافق عند قيمة متوسطة وهذا السلوك يسمى بالتفرقة المركزية **فمثلاً** : درجات الطلاب في الثانوية العامة نجدها تترافق معظمها ما بين ٧٠ % و ٩٠ % و تترافق أكثر عند قيمة معينة والتي تمثل مركز جذب لأغلب التكرارات وغير هذا تكون أعداد الطلاب فيها قليل بالمقارنة بمركز الجذب هذا وأي دراسة إحصائية لتوزيع تكراري يعتمد أساساً على دراسة هذا السلوك وقياسه ومن مقاييس التفرقة المركزية الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

الوسط الحسابي (المتوسط أو التوقع) :

هو أبسط المتوسطات جميعاً وأكثرها تداولاً وهو القيمة التي لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية ويمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم تقسم على عدد المفردات أي أن الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

لحساب الوسط الحسابي لتوزيع تكراري نأخذ مجموعات تتبع الآتي :

- ١) تكون جدول مكون من ٤ أعمدة ، العمود الأول نكتب به المجموعات
 - ٢) العمود الثاني ونكتب به التكرار
 - ٣) العمود الثالث ونكتب به مراكز المجموعات
- حيث مركز المجموعة = $\frac{\text{بداية المجموعة} + \text{نهاية المجموعة}}{2}$

- ٤) العمود الرابع نكتب به حاصل ضرب تكرار كل مجموعة × مركز المجموعة
- ٥) نحسب الوسط الحسابي حيث يساوي مجموع حواصل الضرب ÷ مجموع التكرارات

أمثلة توضيحية

١) إذا كانت درجات ٥ طلاب في امتحان شهر يناير لمادة الرياضيات هي ٧ ، ١٠ ، ٣ ، ٦ ، ٩ فأوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات

والحل

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$\therefore \text{الوسط الحسابي} = \frac{7 + 10 + 3 + 6 + 9}{5} = \frac{35}{5} = 7 \text{ درجات}$$

٢) من الجدول التالي أوجد الوسط الحسابي

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٣٠	٢٥	١٥	١٠٠

والحل

نحدد مراكز المجموعات

$$\text{مركز المجموعة الأولى} = \frac{10 + 10}{2} = 10 ، \text{مركز المجموعة الثانية} = \frac{20 + 20}{2} = 20 \text{ وهكذا}$$

$$\text{ونعتبر نهاية المجموعة الأخيرة} = 60 \text{ فيكون مركزها} = \frac{60 + 50}{2} = 55$$

ثم تكون الجدول الآتي ونحسب في الخانة الأخيرة مركز المجموعة × التكرار

المجموعات	التكرار	مراكز المجموعات	ك × م
-١٠	١٠	١٥	١٥٠ = ١٥ × ١٠
-٢٠	٢٠	٢٥	٥٠٠ = ٢٥ × ٢٠
-٣٠	٣٠	٣٥	١٠٥٠ = ٣٥ × ٣٠
-٤٠	٢٥	٤٥	١١٢٥ = ٤٥ × ٢٥
-٥٠	١٥	٥٥	٨٢٥ = ٥٥ × ١٥
	١٠٠		٣٦٥٠

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{3650}{100} = 36,5$$



أسئلة تدريبية

تمرين (١٠)

الحصول التالي يوضح التوزيع التكراري لأعمار الأسبوعيين في نادي رياضي:

المجموعات	-٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	المجموع
التكرار	٥	٢٠	٣٥	٢٠	١٠	٩٠

أوجد الوسط الحسابي لأعمار الأسبوعيين

حل المسألة

المجموعات	التكرار	مركب	المجموع
-٥٠	٥		
-٤٠	٢٠		
-٣٠	٣٥		
-٢٠	٢٠		
-١٠	١٠		
-٥٠	٩٠		

الوسط الحسابي =



موقع الماهر في الرياضيات www.elmaher.org

يحتوي على امتحانات إضافية من السنوات السابقة مع كثير من الموضوعات



على الوسط الحسابي

١٥٠

١٥٠

أوجد راجع صواب واخطأ

١) أوجد ما ياتو

$[-7, 4] - [-7, 4] =$

٢) مجموعة حل المتباينة $1 < x < 2$ من $2 > x$ من x من

٣) العلاقة من $0 = 0$ يمثلها مستقيم ميله

٤) إذا كانت $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} =$ من $\frac{2}{\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}$ من

من $2 - 1$ من 0 من 0

١

٥) استطوانة دائرية قائمة حجمها 1510 cm^3 وارتفاعها 10 cm أوجد مساحتها الكلية

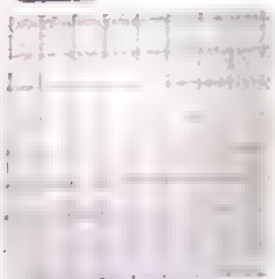
٢

٦) الحصول التالي يوضح التوزيع التكراري لأعمار الأسبوعيين في نادي رياضي

المجموعات	-٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠	المجموع
التكرار	٥	٢٠	٣٥	٢٠	١٠	٩٠

٧) أوجد عدد العمال الذين تقل أعمارهم عن ٨٠ سنة أسبوعياً

٨) أوجد المنحنى التكراري المتجمع الصاعد





٥ اوجد الوسط الحسابي للتوزيعات التكرارية الآتية:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

[١١]

المجموعات	-١٢	-١٦	-٢٠	-٢٤	-٢٨	-٣٢	المجموع
التكرار	٣	٧	١٠	١٥	١٠	٥	٥٠

[١٥,١٦]

المجموعات	-١	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٥	٣	٦	٤	٢	٥	٢٥

[١٣]

المجموعات	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	المجموع
التكرار	١٠	١٢	١٨	٥	٣	٢	٥٠

[١٧]

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	١٠	٢٥	٣٥	٢٠	١٠	١٠٠

[٢١,٢٢]

المجموعات	-١	-٣	-٦	-٩	-١٢	-١٥	-١٨	المجموع
التكرار	٣	٦	٨	١٠	١٢	٦	٥	٥٠

[١٩,٢٠]

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥	المجموع
التكرار	٤	١٦	١٨	٢٥	١٨	١٩	١٠٠

[٢٩,٣٠]

٦ فيما يلي التوزيع التكراري لدرجات حرارة ١٠٠ منطقة في دول العالم في يوم ما

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	١٤	٢٧	س	١٦	١٨	١٠٠

[٢٥]

١ اوجد قيمة س

[٢٩,٧]

٢ اوجد الوسط الحسابي

[٢١]

٣ اوجد عدد المناطق التي تقل درجة الحرارة فيها عن ٢٥ درجة



ثانياً: اجب عما يأتي:



مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي:

- ١ الوسط الحسابي لمجموعة من القيم =
 ٢ الوسط الحسابي للقيم ٤، ٢، ٣ هو
 ٣ الوسط الحسابي للقيم ٨، ٥، ٤، ٤، ٦، ٢ هو
 ٤ الوسط الحسابي للقيم ١٨، ١٣، ١١، ١٤، ٩ هو
 ٥ الوسط الحسابي للقيم ١٨، ١٧، ١٦، ١٣، ١٤، ١٥، ١٢ هو

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

- ١ الوسط الحسابي للقيم ٥، ٤، ٤، ٧، ٤، ٨ هو
 [٩ د ٤ د ٦ د ٥]
 ٢ الوسط الحسابي للقيم ٨، ٤، ٥، ٢، ٣، ٧ هو
 [٢ د ٨ د ٥ د ٤]
 ٣ الوسط الحسابي للقيم ١٠، ٤، ٨، ٦، ١٤، ٢ هو
 [١٠ د ٨ د ٤ د ٦]
 ٤ الوسط الحسابي للقيم س، س، س، س، س، س هو
 [س س د س د ١/٣ س د ١/٤ س]
 ٥ إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة القيم ١٥، ١٧، س هو ١٥ فإن س =
 [١٣ د ١٦ د ١٨ د ١٤]



مسائل المستوى الثاني

٤ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ تلميذ في مادة الرياضيات

الدرجات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

[٢٨,٥]

اوجد الوسط الحسابي لدرجات التلاميذ



٥) قسّم الجدول التكراري الآتي بين التوزيع التكراري لعدم أهم الأجزاء

القيم	-٢٢	-١٤	-٨	-٤	-٢	٤	٨
التكرار	١	٥	٧	٢-٤	٨	٥	٤

باحتساب المصاحف لعدم ٥٠ مصحف

١) أوجد قيمة ك

٢) أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع

٣) أوجد عدد العمال الذين لا تقل أعمارهم عن ١٤

٨) امل ما يأتي

١) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٨ والحد الأعلى لها ١٨

فإن مركزها ١٣

٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩

فإن حدها الأعلى ١١

٣) إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ١٦ ومركزها ١٢

فإن الحد الأدنى لها هو

٤) إذا كانت بداية مجموعة هي ١٠ ومركزها هو ١٥

فإن طول المجموعة هو

٥) مركز المجموعة الأولى من المجموعات ٥ - ١١٤ - ١٧٤ - ٢٢٤ هو

٦) إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع تكراري هو ٢٩,٨ ومجموع تكراراته ١٢٠

فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة في مركزها



مسائل المتقوسين

٩) الجدول الآتي يبين مجموعات الأجر الأسبوعي بالجنبة لعدم من العمال وحواصل ضرب مراكز المجموعات في التكرارات هي:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
م × ك	١٥٠	٥٠٠	١,٥٠٠	١١٢٥	٨٢٥

أوجد الوسط الحسابي للأجر الأسبوعي

(٣٦)



الوسيط

الوسيط لمجموعة من القيم

هو القيمة التي تنقسم مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

مثلاً: إذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها فردى مثل ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١

فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في الوسط تماماً بعد ترتيبها تصاعدياً

فإذا رتبنا القيم تصاعدياً فكانت ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١

فإن الوسيط الذي ترتيبه $\left(\frac{١٥+٢١}{٢}\right)$ حيث ١٥ عدد القيم الفردية هو ٩

أما إذا كان عدد القيم زوجي فمجموعة القيم ٨, ١٤, ١٦, ٢٦, ٢٨, ٣١, ٣٢

فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين اللتين تقعان في الوسط بعد الترتيب تصاعدياً

فإذا رتبنا القيم تصاعدياً فكانت ٨, ١٤, ١٦, ٢٦, ٢٨, ٣١, ٣٢

فإن الوسيط الذي ترتيبه $\left(\frac{١٦}{٢}, \frac{٢٦}{٢}\right)$ حيث ١٦ عدد القيم الزوجية

$$\frac{١٦+٢٦}{٢} = ٢١$$

الوسيط لتوزيع تكراري ذي المجموعات بيانياً

لايجاد الوسيط لتوزيع تكراري بيانياً تتبع الآتي:

١) تكون جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد (أو النازل)

٢) لرسم المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) لهذا التوزيع

٣) نوجد ترتيب الوسيط حيث يساوي $\frac{N}{٢}$ حيث N مجموع التكرارات

٤) نعين النقطة $\frac{N}{٢}$ على المحور الرأسى (التكرار)

ولرسم منها مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى في نقطة

ثم نسقط من هذه النقطة عموداً يقطع المحور الأفقى في نقطة تكون هي الوسيط

أمثلة توضيحية

١ أوجد الوسيط للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	صفر	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠



الحل

أولاً: باستخدام المنحنى التكراري المتجمع الصاعد:

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من صفر	صفر
أقل من ٤	٥
أقل من ٨	٢٠
أقل من ١٢	٥٠
أقل من ١٦	٩٠
أقل من ٢٠	١٠٠

١ تكون الجدول التكراري

المتجمع الصاعد كما درسا

٢ نرسم المنحنى التكراري

المتجمع الصاعد

٣ نوجد ترتيب الوسيط

$$\text{حيث ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

$$50 = \frac{100}{2}$$

٤ نعين النقطة ٥٠ على المحور الرأسي

(التكرار) ونرسم منها مستقيم أفقي

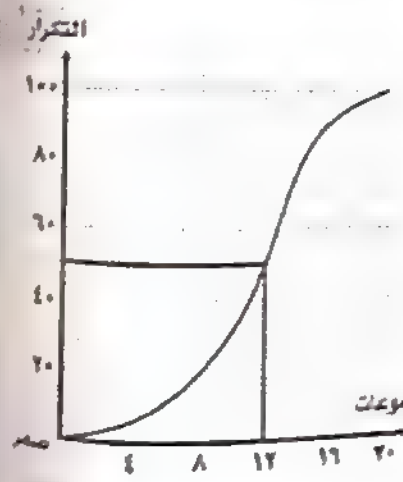
يقطع المنحنى في نقطة

ثم نسقط من هذه النقطة عموداً

فيقطع المحور الأفقي (المجموعات)

في نقطة نجد أنها ١٢

∴ الوسيط (من الرسم) = ١٢ المجموعات

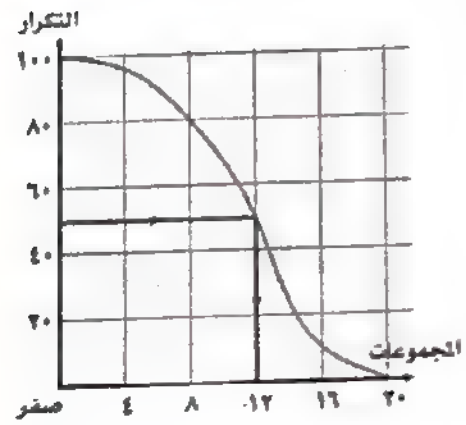


ثانياً: باستخدام المنحنى التكراري المتجمع النازل:

تكون الجدول التكراري ونرسم المنحنى التكراري المتجمع النازل كما سبق بنفس الطريقة نوجد الوسيط من المنحنى المتجمع النازل

المنحنى التكراري المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
صفر فأكثر	١٠٠
٤ فأكثر	٩٥
٨ فأكثر	٨٠
١٢ فأكثر	٥٠
١٦ فأكثر	١٠
٢٠ فأكثر	صفر



$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

∴ الوسيط (من الرسم) = ١٢

٢ التوزيع التكراري الآتي يبين الأجر اليومي لعند ١٠٠ عامل في أحد المصانع

الأجر بالجنيه	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	المجموع
عدد العمال	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

١ أرسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع معاً

٢ أوجد الأجر الوسيط لكل من

٣ إذا كان كل ١٠ مم من المحور الأفقي يمثل ٥ جنيهات

فأوجد ما يمثل ٢ مم



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأعمار ٥٠ طالب في أحد فصول المدرسة

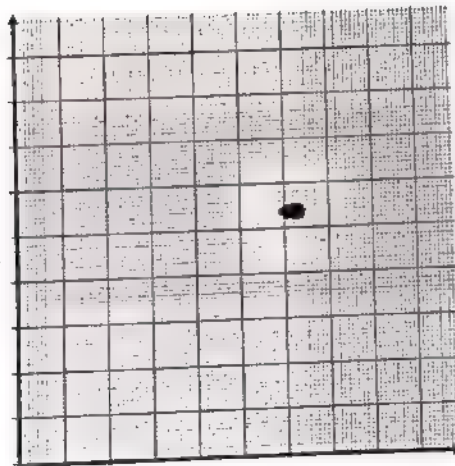
مجموعات العمر بالسنة	-١٢	-١٣	-١٤	-١٥	-١٦	المجموع
عدد الطلاب	١٣	١٢	١٧	٧	١	٥٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لهذا التوزيع ومن الرسم أوجد العمر الوسيط لهذه المجموعة

العمل

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٢
أقل من ١٣
أقل من ١٤
أقل من ١٥
أقل من ١٦
أقل من ١٧



١٢ ١٣

∴ ترتيب الوسيط = $\frac{.....}{.....} = 25$

∴ الوسيط (من الرسم) =

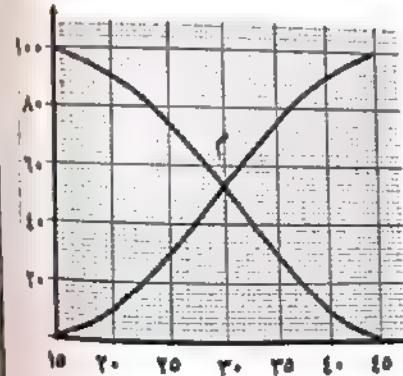


الجدول التكراري المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	صفر

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٥	صفر
أقل من ٢٠	١٠
أقل من ٢٥	٢٥
أقل من ٣٠	٤٧
أقل من ٣٥	٧٢
أقل من ٤٠	٩٢
أقل من ٤٥	١٠٠



٢) نرسم المنحنيين المتجمعين

الصاعد والنازل معاً فيتقاطعا

في نقطة واحدة نفرضها (

من نقطة) نسقط عمود

على المحور الأفقي فيقطعه

في نقطة هي الوسيط

∴ الأجر الوسيط = ٣١ جنيه

$$③ \quad ٥ = ١٠ \times \frac{١}{٢} \quad \therefore \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١ \text{ جنيه}$$



ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختر نفسك



المتغير
تكراري
(١٦)

(١) أكمل ما يأتي:

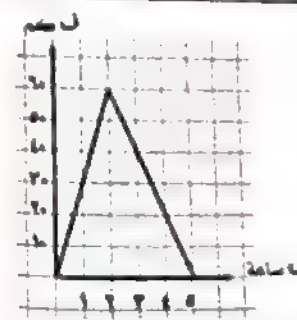
- مجموعة حل المتباينة $3 - 4 \leq x \leq 2$ هي
- المقدار $5\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{5}$ في أبسط صورة =
- العدد $\sqrt{7}$ ينحصر بين العددين النسبيين ٤ لأقرب رقمين عشريين
- حجم الكرة التي طول قطرها ٦ سم هو

٤ درجات

(ب) إذا كانت $x = -3$ ، $y = 2$ ، $z = 1$ فأوجد مستعينا ببحث الأعداد
 $x - y$ ، $y - z$ ، $z - x$

٣ درجات

(ج) الشكل المقابل



- يمثل حركة سيارة مقيمة
 من نقطة ثابتة
 أوجد السرعة المنتظمة للدراجة خلال
 ١ أول ساعة
 ٢ الساعات الثلاث التالية

٣ درجات

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتي:

- الوسيط لمجموعة القيم ٨، ٥، ٦، ٢، ٣ هو
- الوسيط لمجموعة القيم ٣، ١٢، ٧، ١٩، ٦ هو
- الوسيط لمجموعة القيم ٢، ٧، ٤، ٩، ٥، ١٢ هو
- الوسيط لمجموعة القيم ٦، ١٧، ٨، ١٥، ١١ هو
- ترتيب الوسيط لمجموعة القيم ٦، ٢، ٥، ٨، ١ هو
- إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم
- إذا كان الوسيط لمجموعة القيم $1 + 1 + 2 + 1 + 5 + 4 + 3$ هو ٧ فإن =

(٣) باستخدام المخطط التجميع المساعد أوجد الوسيط للتوزيع التكراري فيما يأتي:

المجموعات	-٢	-٤	-٦	-٨	المجموع
التكرار	١	٢	٢	٥	١٠

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

مسائل المستوى الثاني

(٤) فيما يلي توزيع الأجور لبعض العاملين في أحد المصانع بالجنيه

مجموعات الأجور	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد العمال	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠

أوجد الأجر الوسيط لهذه المجموعة

[٣]



الوسط

٧ التوزيع التكراري الآتي يبين عدد أيام غياب ٦٠ طالب خلال العام الدراسي

المجموعات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	المجموع
التكرار	٦	١١	١٥	١٠	٩	٥	٤

أوجد الوسيط مستخدماً المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

(١٨)

٨ من الجدول التكراري التالي ذي المجموعات المتساوية في المدى

المجموعات	-١٠	-٢٠	س	-٤٠	-٥٠	-٦٠	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

١ أوجد قيمة كل من س، ك

(١٨، ١٠)

٢ ارسم في شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ثم احسب الوسيط



مسائل التفريق

٩ إذا كان الجدول التكراري المتجمع الصاعد لتوزيع تكراري ما تبدأ حدوده العليا

للمجموعات بأقل من ٢٠ وحتى أقل من ٤٤ و التكرار المتجمع الصاعد كان على

الترتيب كما يلي : ١٠٠ ، ٨٨ ، ٦٨ ، ٣٨ ، ١٥ ، ٥ ، ٠

فأوجد جدول التوزيع التكراري ثم أوجد الوسيط

(٢١)



اطلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية
شرح ومراجعة وأهم الأسئلة المتوقعة للامتحان
امتحانات اضافية من السنوات السابقة

الماهر في الرياضيات



٥ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٥٠ طالباً في أحد الامتحانات

مجموعات الدرجات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٢	١٨	٧	٣	٢

١ أوجد الدرجة المتوسطة

(٣١)

٦ ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد أو النازل
وعين الوسيط بيانياً من التوزيعات التكرارية الآتية :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٧	٩	١٥	١١	٨	٥٠

(٢١)

المجموعات	-٢	-٤	-٦	-٨	-١٠	-١٢	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٩	١٤	٢	٥٠

(١٠)

المجموعات	-١٢	-١٣	-١٤	-١٥	-١٦	المجموع
التكرار	١٣	١٢	١٧	٧	١	٥٠

(١٨)

المجموعات	-١٠	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

(٢١)

المجموعات	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	المجموع
التكرار	٣	٧	١١	١٥	١٠	٥	٥٠

(٢١)

المسألة

المسألة

هو القيمة الأكثر شيوعاً في المجموعة أو القيمة التي تكرر أكثر من غيرها

مثلاً: المسألة لمجموعة القيم ٥، ٧، ٤، ٥، ٦، ٤، ٥، ٢، ٥ هو

و لإيجاد المسألة تتبع الخطوات التالية:

- ١) نرسم المرح التكراري للتوزيع ثم نرسم مستقيم يصل بين الرأس الأيمن العلوي لأطول مستطيل وبين الرأس الأيمن العلوي للمستطيل السابق له ثم نرسم مستقيم يصل بين الرأس الأيسر العلوي لأطول مستطيل وبين الرأس الأيسر العلوي للمستطيل الذي يليه
- ٢) يتقاطع المستقيمان في نقطة، نسقط منها عموداً على المحور الأفقي يقطعه في نقطة فتكون هي المسألة

أمثلة توضيحية

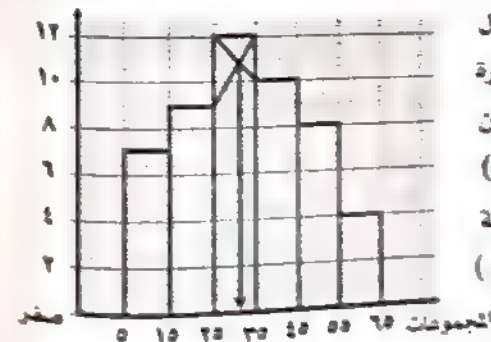
١) الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لمرجات ٥٠ طالب في أحد الاختبارات

المرجات	-٥٥	-٤٥	-٣٥	-٢٥	-١٥	-٥
عدد التلاميذ	٤	٨	١٠	١٢	٩	٧

ارسم المرح التكراري ثم أوجد المسألة

و الحل

التكرار



نرسم المرح التكراري كما بالشكل
بان نرسم مستطيلات تمثل كل فترة
مثلاً المستطيل الأول بين النقطتين
التي تمثلان الفترة (من ٥ إلى ١٥)
و يصل لأعلى حتى النقطة المقابلة
لتكرار الفترة (٧ تكرار الفترة الأولى)

ثم نعين أطول مستطيل وهو الذي يمثل المجموعة الأكثر تكراراً
وتسمى "المجموعة المتوائية" ونصل رأسه العلوي الأيمن بالرأس العلوي الأيمن
للمستطيل السابق له ونصل رأسه العلوي الأيسر بالرأس العلوي الأيسر
للمستطيل الذي يليه كما بالشكل ونسقط من نقطة تقاطع المستقيمين
عموداً على المحور الأفقي فيقطعه في نقطة فتكون هي المسألة
∴ المسألة = ٣١ درجة

أمثلة لتقريب

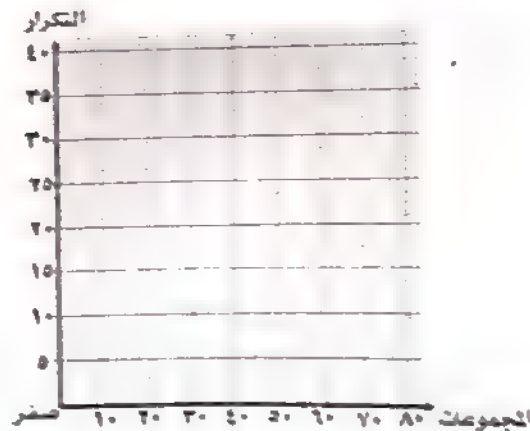
تقريب (١)

الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري للأجور الأسبوعي
مائة عامل بالجنيه

مجموعات الأجر	-٥٠	-٤٠	-٣٠	-٢٠	-١٠
عدد العمال	١٠٠	١٥	٢٥	٣٠	٢٠

ارسم المرح التكراري لهذا التوزيع وأوجد المسألة المتوائية

و الحل



من الرسم نجد أن المسألة = جنيه



ثانياً : اجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي :

- ١ المتوال لمجموعة من القيم هو
- ٢ المتوال للقيم ٢، ٣، ٧، ١٤ هو
- ٣ المتوال للقيم ٧، ٢٤، ٥٧، ١٠٠ هو
- ٤ المتوال للقيم ٦، ١٤، ٢٤، ٣٦ هو
- ٥ إذا كان المتوال للقيم ٣، ٦، ١٠، ١٤ هو ٦ فإن ك =
- ٦ إذا كان المتوال للقيم ١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١ هو ٣ فإن ك =
- ٧ إذا كان المتوال للقيم ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ هو ٤ فإن س =

٣ أوجد المتوال بيانياً للجداول التكرارية الآتية :

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠

[٣٧]

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٥	٢٠	٤٠	٢٥	١٠	١٠٠

[٣٠]

المجموعات	-١٠	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٧	٩	١١	٨	٥	٤٠

[٩]

المجموعات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	المجموع
التكرار	٤	٦	٨	٧	٥	٣٠

[١٨]



أسئلة المراجعة

على المتوال

تمارين (١٧)

١ ساعة امتحان ومراجعة

أولاً : راجع معنا واختر نفسك

اختبار
تريكين
(١٥)



١ اكمل ما يأتي :

- ١ $[-\infty, 3] \cup [4, \infty) =] \dots$
- ٢ مجموعة حل المتباينة $\frac{1}{4} - 2 \geq 0$ هي $2 > 3$ في 2 هي
- ٣ إذا كانت مساحة الأوجه الستة لمكعب 54 فإن حجمه =
- ٤ إذا كان $S = \frac{1 - \sqrt{2}}{8\sqrt{2} - 3}$ ، $S = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ فإن قيمة $(S + S^{-1})^2 = \dots$

درجات

(ب) حل المعادلة $\sqrt{2}S - 3 = 2$ في 2 ومثل الحل على خط الأعداد

درجات

(ج) أوجد المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

درجات



٧ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري ذا المجموعات متساوية المدى للأجور الأسبوعية لعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع

الأجر بالدينار	-٧٠	-٨٠	-٩٠	-١٠٠	-١١٠	-١٢٠	-١٣٠
عدد العمال	١٠	١٣	٤	٢٠	١٦	١٤	١١

أوجد:

١ قيمة كل من س، ك

[١٠، ١١]

٢ الأجر المتواني بالجنيه

[١٢، ١٣]



مسائل المتقوسين

٨ الجدول الآتي يبين توزيع التكراري لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلوجرام بإحدى المدارس

الوزن بالكيلوجرام	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	-٥٥
عدد التلاميذ	٤ + ك	٣ ك	٤ ك	٣ ك + ١	٣ ك - ١	١ + ك

١ أوجد قيمة ك

[٢]

٢ ارسم المدرج التكراري وأوجد الوزن المتواني

٩ أوجد المتوال للجدول التكراري الآتي:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	٢٠	٣٠	٣٠	١٥

[٦]



مسائل المستوى الثاني

٤ أوجد المتوال بيانياً للجدول التكراري الآتي:

المجموعات	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠
التكرار	١٠	١٢	١٤	٩	٣	٢

[١٤]

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥
التكرار	٥	٦	٩	١٥	٨	٧

[١٥]

المجموعات	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨

[١٦]

٥ الجدول الآتي يوضح درجات أحد الفصول في مادة الرياضيات

مجموعات الدرجات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
عدد الطلاب	٣	٥	٦	٥	٢

[١٧]

ارسم المدرج التكراري وأوجد الدرجة المتواني

٦ في التوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠

أوجد:

١ الوسط الحسابي

[١٨]

٢ الوسط

[١٩]

٣ المتوال

[٢٠]



نموذج (٢)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

١ اكمل ما يأتي :

درجات

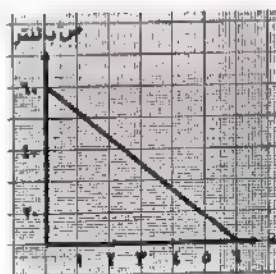
- ① مجموعة حل المتباينة $-4 \leq x \leq 8$ هي $\dots\dots\dots$
- ② أسطوانة دائرية قائمة حجمها 500π وطول نصف قطر قاعدتها ٥ م يكون ارتفاعها $\dots\dots\dots$
- ③ $54\sqrt{3} + \frac{14}{\sqrt{3}} - 28\sqrt{3} - \sqrt{3} = \dots\dots\dots$
- ④ $[-3, 2] - [5, 1] = \dots\dots\dots$

درجات

٢ (١) إذا كان $\frac{4}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = x$ ، $\sqrt{2} - \sqrt{2} = y$ ،

- ① أثبت أن x ، y عدنان متوافقان
- ② أوجد x^3 من y^3

(ب) الشكل المقابل



- يمثل العلاقة بين الزمن x بالساعة وكمية الوقود y بالليلتر
- فإذا ملئ خزان سيارة بالبنزين أوجد :
- ① أكبر سعة للخزان
 - ② متى يفرغ الخزان ؟
 - ③ معدل استهلاك السيارة للبنزين

درجات

٣ احسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠



اختبارات (٢)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

١ اكمل ما يأتي :

درجات

- ① مكعب طول حرفه ٣ فإن حجمه $\dots\dots\dots$
- ② إذا كان $3\sqrt{2} + 2 = x$ ، $3\sqrt{2} - 2 = y$ فإن $\frac{x}{y} = \dots\dots\dots$
- ③ $[-2, 2] \cup [3, 4] = \dots\dots\dots$
- ④ مجموعة حل المتباينة $-3 > x + 1 > 5$ هي $\dots\dots\dots$

درجات

٢ (١) مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل العلاقة $x + y = 3$

(ب) إذا كان $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = x$ ، $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = y$ ،

أوجد x ثم أثبت أن $(x + y)^2 = 2 - 10$

درجات

٣ فيما يلي التوزيع التكراري للأجر الأسبوعي لعمال إحدى المزارع

الأجر بالجنيه	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	-٧٥
عدد العمال	١٠	١٢	٢٦	٣٠	١٧	١١	٤

احسب الأجر الوسيط

نموذج (3)

اختبار مراجعة على ما سبق

30

10
دقائق

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين:

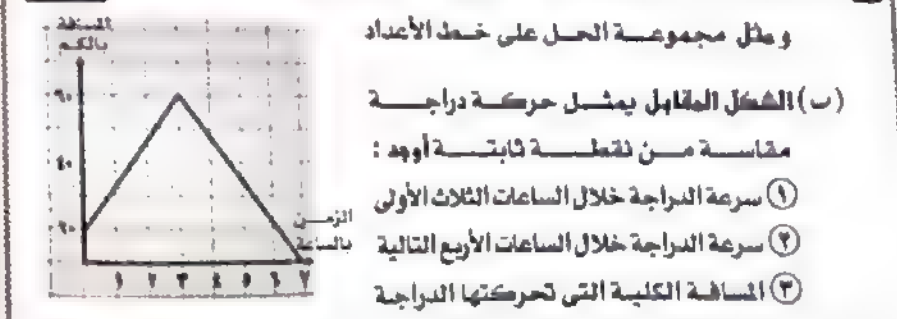
① $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \dots\dots\dots$
[صفر د - $\sqrt{2}$ د - $2\sqrt{2}$ د - $3\sqrt{2}$ د]

② إذا كان حجم مكعب هو $\pi\sqrt{3}$ فإن طول نصف قطرها $\dots\dots\dots$
[$\sqrt{3}$ د - $\sqrt{3}\pi$ د - $\sqrt{3}\pi^2$ د - $\sqrt{3}\pi^3$ د]

③ إذا كانت $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = س$ ، $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = ص$ فإن $\dots\dots\dots$
[$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ د - $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ د - $\sqrt{3}$ د - $\sqrt{2}$ د]

④ $\{ \dots \} \cap \{ \dots \} = \{ \dots \}$
[$\{ \dots \}$ د - $\{ \dots \}$ د - $\{ \dots \}$ د - $\{ \dots \}$ د]

2 (أ) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة $1 \leq س < 2$ هي صورة فترة



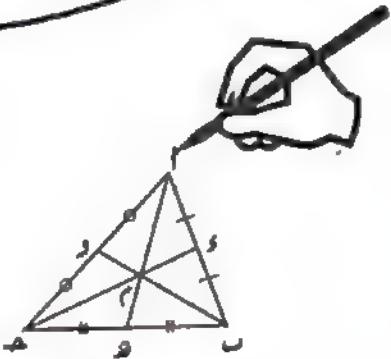
3 الجدول الآتي لتوزيع تكراري لدرجات 20 طالباً في مادة الرياضيات

المجموع	-10	-8	-6	-4	-2	الدرجات
التكرار	20	3	5	6	4	2

① أوجد الوسط الحسابي

② أوجد المنوال بيانياً

نتيجه الهندسة

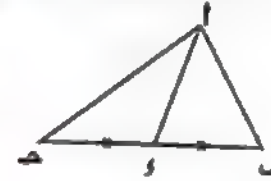


متوسطات المثلث

الوجه الرابع

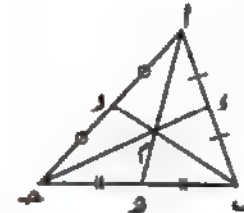
تعريف

المتوسط في المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أي رأس من رؤوسه إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس



فمثلاً: ΔABC فيه D منتصف BC

فيكون AD متوسط للمثلث
وبالطبع كل ضلع في المثلث يمكن أن
ننصفه ونرسم متوسط



أي أن أي مثلث له ثلاث متوسطات

نظرية

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة

فمثلاً: في الشكل السابق نجد أن:

المتوسطات AD ، BE ، CF تتقاطع جميعاً في نقطة M
ونقطة تقاطع المتوسطات في أي مثلث لها خاصية مهمة جداً وهي ما يلي:

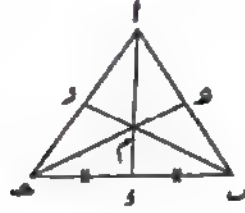
نظرية

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ٢:١ من جهة القاعدة

ملاحظة

إذا كان AD متوسطاً في ΔABC ، M هي
نقطة تقاطع متوسطات المثلث فلنا نستنتج ما يلي:

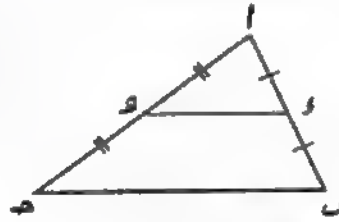
$$\begin{aligned} AM &= \frac{2}{3} AD, & MD &= \frac{1}{3} AD \\ AM &= \frac{2}{3} BE, & ME &= \frac{1}{3} BE \\ AM &= \frac{2}{3} CF, & MF &= \frac{1}{3} CF \end{aligned}$$



فمثلاً: في الشكل السابق إذا كان $AD=6$ ، فإن $AM=4$ ، $MD=2$
ونلاحظ أن: $AM=2$ ، $MD=1$ ، وأن $AD=3$ لأن $AD=6$ ، $AM=4$ ، $MD=2$
إذا كان AD متوسطاً في ΔABC ، $M \in AD$ بحيث $AM=2$ ،
فإن M هي نقطة تقاطع متوسطات ΔABC ويكون $MD=1$ متوسطان
لأنهما يمران بنقطة M وتكون MD منتصف AB وتكون MD منتصف AC
إذا كان ΔABC متساوي الأضلاع كانت متوسطاته الثلاثة متساوية في الطول

حقيقة

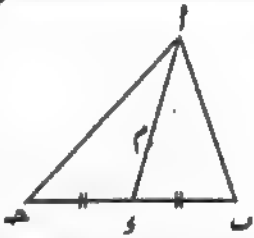
في ΔABC إذا كان
 D منتصف AB ، E منتصف AC
فإن: ① $DE = \frac{1}{2} BC$
② $DE \parallel BC$



أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل:

ABC فيه AD متوسط، M نقطة تقاطع
متوسطاته فإذا كان $AD=9$ ، $AM=8$
فأوجد طول كل من: MD ، AM ، AD





في الحل

المعطيات

المطلوب

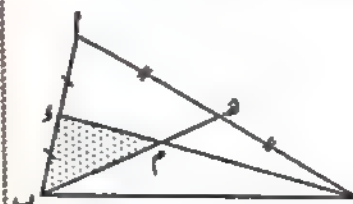
البرهان

م نقطة تقاطع متوسطات Δ ، $9 = 1$ ، $8 = 3$ ، $8 = 3$
 طول كل من : 3 ، 3 ، 3
 \therefore 3 متوسط في Δ ، 3 ، 3 ، 3 نقطة تقاطع متوسطاته
 $3 = 9 \times \frac{1}{3} = 3$ ، $3 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$
 $3 = 3 \times 2 = 6$ ، $3 = 3$
 \therefore 3 متوسط
 $\therefore 8 = 3$ ، $3 = 3$

#



في الشكل المقابل :



أ ب هـ Δ فيه 3 ، 3 منتصفى
 أ ب ، أ هـ ، على الترتيب فإذا كان
 هـ $12 = 3$ ، $6 = 3$ ، $8 = 3$
 فأوجد طول كل من 3 ، 3 ، 3
 ثم أوجد محيط Δ م ب و

في الحل

المعطيات

المطلوب

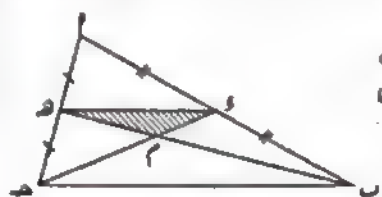
البرهان

و هـ منتصف أ ب ، أ هـ ، $12 = 3$ ، $6 = 3$ ، $8 = 3$
 طول كل من 3 ، 3 ، 3 محيط Δ م ب و
 \therefore منتصف أ ب ، هـ منتصف أ هـ
 \therefore هـ ، ب هـ متوسطان في Δ ، م نقطة تقاطع متوسطاته
 $12 = 3$ ، $6 = 3$ ، $3 = 12 \times \frac{1}{3} = 4$
 $8 = 4 - 12 = 8$
 $3 = 6 \times \frac{1}{3} = 2$ ، $3 = 3$ ، $3 = 3$
 $\therefore 8 = 3$ ، $3 = 3$ ، $3 = 3$
 \therefore محيط Δ = مجموع أطوال أضلاعه
 \therefore محيط Δ م ب و $3 = 3 + 3 + 3 = 9$
 $14 = 4 + 4 + 6 =$

#



في الشكل المقابل :



أ ب هـ Δ فيه ب هـ ، هـ د متوسطان
 متقاطعان في م ، $10 = 3$ ، $3 = 3$
 هـ د = 9 ، ب هـ = 14
 أوجد محيط Δ م ب و

في الحل

المعطيات

المطلوب

البرهان

ب هـ ، هـ د متوسطان ، ب هـ = 10 ، هـ د = 9 ، ب هـ = 14
 محيط Δ م ب و
 \therefore ب هـ ، هـ د متوسطان في Δ أ ب هـ تقاطعا في م
 \therefore م نقطة تقاطع متوسطات المثلث
 \therefore م تقسم كل منها بنسبة 2 : 1 من جهة القاعدة
 $10 = 3 \times \frac{1}{3} = 3$ ، $3 = 3$ ، $3 = 3$
 $9 = 3 \times \frac{1}{3} = 3$ ، $3 = 3$ ، $3 = 3$
 \therefore منتصف أ ب ، هـ منتصف أ هـ
 \therefore ب هـ // هـ د ، $3 = 3$ ، $3 = 3$
 $14 = 3$ ، $3 = 3$
 \therefore محيط Δ م ب و $3 = 3 + 3 + 3 = 9$

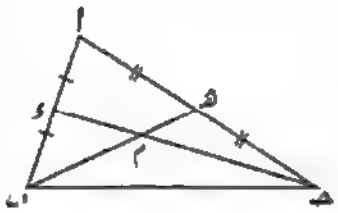
#



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل :



ب هـ ، هـ د متوسطان في Δ أ ب هـ
 متقاطعان في م حيث
 هـ د = 10 ، ب هـ = 9
 أكل ما يأتي لإيجاد طول كل من 3 ، 3 ، 3

المعطيات

المطلوب



البرهان

في ΔABC هـ

$\therefore \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$ متوسطات متقاطعان في م

\therefore م هي نقطة

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

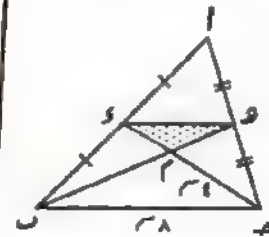
$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

تدريب (٢)

في الشكل المقابل :



و، هـ منتصف \overline{AB} ، \overline{AC} هـ

على الترتيب حيث $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\{M\} = \overline{DE} \cap \overline{BC}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$

أكمل ما يأتي لإيجاد محيط ΔDEF و

المعطيات

المطلوب

في ΔABC هـ

$\therefore \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$ متوسطات متقاطعان في م

\therefore م هي نقطة

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD} \therefore \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

في ΔABC هـ

\therefore هـ منتصف \overline{AB} ، \overline{AC} هـ

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$

\therefore محيط $\Delta DEF = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD}$

\therefore محيط $\Delta DEF = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD}$

تمارين (١)

على متوسطات المثلث



أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

عزيزي الطالب :



في هذا المكان من كل تمرين ستجد :

اسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختبار تراكمي على ما سبق دراسته
تجيبه في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر
ما درست باستمرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة
مما يجعلك في تواصل مع ما درست وأيضاً يعودك على الاختبارات
ويزيل رهبتها في نفسك وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط

ثانياً : اجب عما يأتي :



مسائل المستوى الأول

١) أكمل ما يأتي :

(١) متوسطات المثلث تتقاطع

(٢) نقطة تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة من جهة الرأس

(ب) في الشكل المقابل :

ΔABC هـ فيه و، هـ منتصف \overline{AB} ، \overline{AC} هـ

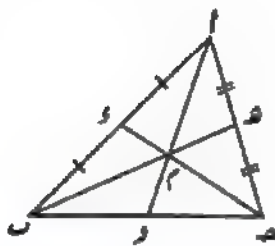
$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$

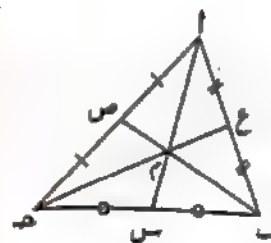
$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$

$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{DE} = \overline{BC}$





(هـ) في الشكل المقابل :



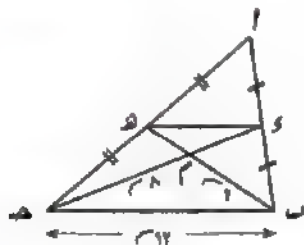
ع ، س ، م من منتصفات \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{AC} ،
إذا كان $AM = 8$ فإن $AS = \dots\dots\dots$
إذا كان $AB = 10$ فإن $AE = \dots\dots\dots$
إذا كان $CM = 8$ فإن $BM = \dots\dots\dots$
إذا كان $BE = 9$ فإن $EM = \dots\dots\dots$

(٢) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- ① نقطة تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة من جهة القاعدة
[١:٢ د ٢:١ د ٣:٢ د ٣:١ د]
- ② في ΔABC إذا كانت نقطة S منتصف \overline{BC} فإن \overline{AS} تسمى
[ارتفاع د متوسط د وتر د منتصف للزاوية د]
- ③ عدد متوسطات المثلث [واحد د اثنين د ثلاثة د عدد لا نهائي]
- ④ في ΔABC إذا كان \overline{AO} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته فإن $OM = \dots\dots\dots$
[٢ د ١ د $\frac{1}{2}$ د $\frac{2}{3}$ د $\frac{1}{3}$]
- ⑤ في ΔABC إذا كان \overline{AO} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته فإن $AM : OM = \dots\dots\dots$
[٢:١ د ١:٢ د ٣:٢ د ٢:٣]
- ⑥ في ΔABC إذا كان \overline{AO} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته ، $AM = 6$ فإن $OM = \dots\dots\dots$
[٢ د ٣ د ١٢ د ١٨]
- ⑦ في ΔABC إذا كان \overline{AO} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته ، $OM = 2$ فإن $AM = \dots\dots\dots$
[١ د ٢ د ٤ د ٦]
- ⑧ في ΔABC إذا كان \overline{AO} متوسط ، M نقطة تقاطع متوسطاته ، $OM = 4$ فإن $AM = \dots\dots\dots$
[٢ د ٨ د ١٢ د ٦]

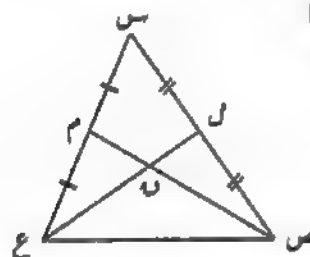
(٣) اكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :

②



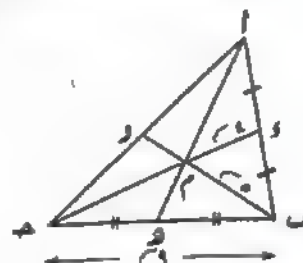
$AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$
 $AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$

④



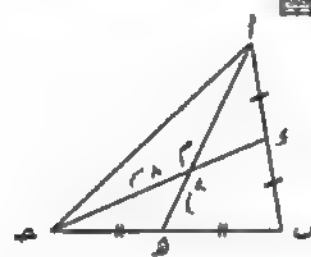
إذا كان $AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$
إذا كان $AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$

①



$AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$
 $AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$

③

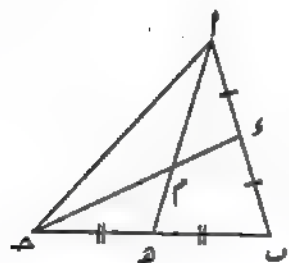


$AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$
 $AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$



مسائل المستوى الثاني

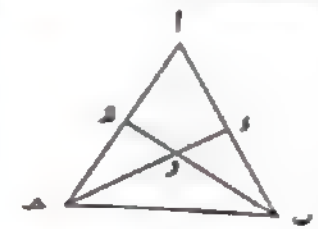
(٤) في الشكل المقابل :



$AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$
 $AM = 6$ ، $BM = 8$ ، $CM = 10$ ، محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$



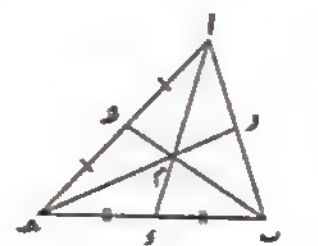
٥ في الشكل المقابل :



ب د ، هـ د متوسطان في Δ ا ب هـ
تقاطعا في د ، هـ د = د ، ب د = د
فاوجد طول كل من : د ، ب د

[٣٩، ٣٢]

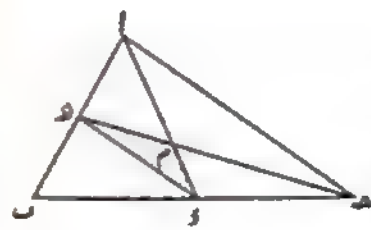
٦ في الشكل المقابل :



ا ب هـ Δ ، و منتصف ب د ، و منتصف ا هـ ،
فبدا تقاطع ا د ، ب د في م ،
رسم هـ م ف تقاطع ا ب في د ،
وكان هـ د = د ، ا ب = ا ب ،
فاوجد طول كل من : ا د ، ا م ، م هـ

[٣٩، ٣٢، ٣٣]

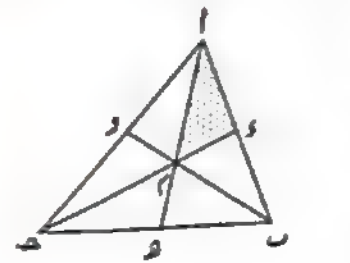
٧ في الشكل المقابل :



ا ب هـ Δ ، ا د ، هـ د متوسطان
فيه يتقاطعان في م ،
ا د = ا د ، ا هـ = ا هـ ،
ا ب = ا ب ،
اوجد محيط خط Δ م و د

[٣٣]

٨ في الشكل المقابل :

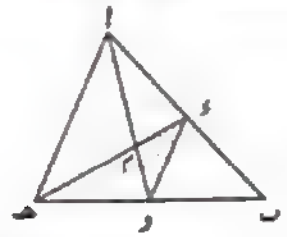


ا ب هـ Δ فيه م نقطة تقاطع متوسطاته ،
ا ب = ا ب ، ا د = ا د ،
ا ب = ا ب ،
اوجد محيط خط Δ ا د م

[٣٨]



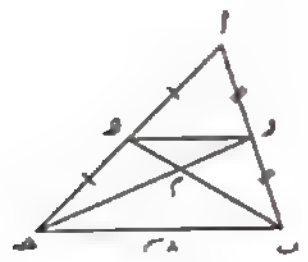
٩ في الشكل المقابل :



ا د ، هـ د متوسطان في Δ ا ب هـ
تقاطعا في م ومحيط Δ ا م هـ = ١٨
فاوجد محيط خط Δ م و د

[٣٩]

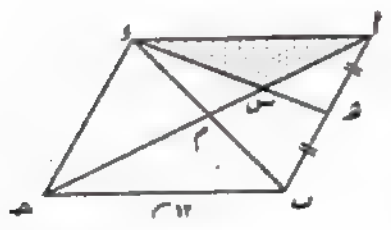
١٠ في الشكل المقابل :



ا ب هـ Δ فيه و منتصف ا ب ،
و منتصف ا هـ ، ب د و هـ = م
فبدا كان ب هـ = ا هـ ،
م = م ،
فاوجد محيط Δ م و د

[٣٩]

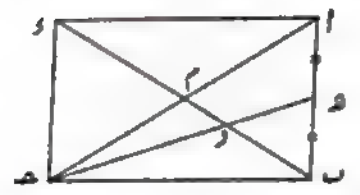
١١ في الشكل المقابل :



ا ب هـ و متوازي أضلاع فيه
ب هـ = ا د ، تقاطع قطراه في م ،
و منتصف ا ب ، ا هـ و د = م ،
د = د ، ا د = ا د ،
اوجد محيط خط Δ ا ب و د

[٣٨]

١٢ في الشكل المقابل :

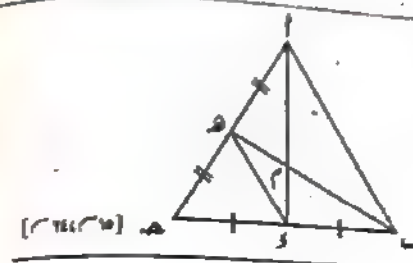


ا ب هـ و مستطيل تقاطع
قطراه في م ، و منتصف ا ب ،
هـ د و ب = د ،
اثبت أن : و نقطة تقاطع متوسطات Δ ا ب هـ
٢ اوجد طول ا م

[٣٩]

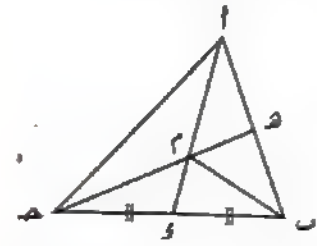


١٣ في الشكل المقابل :



أ ب ح Δ فيه \overline{AD} ، \overline{BE} متوسطان ،
 $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ، $BM = 12$ ،
 $AM = 9$ ، $DM = 6$ ، $EM = 5$ ،
 أوجد محيط كل من : ΔAME ، ΔBMD

١٤ في الشكل المقابل :



أ ب ح Δ ، \overline{AD} ، \overline{BE} متوسطان ، $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ،
 بحيث $AM = 12$ ، $BM = 9$ ، $DM = 6$ ، $EM = 5$ ،
 $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ،
 أثبت أن : $AM = 12$ ، $BM = 9$ ، $DM = 6$ ، $EM = 5$

١٥ أ ب ح متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، \overline{AD} منتصف \overline{BC} ،

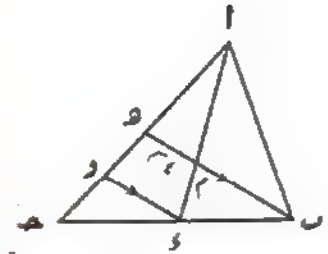
رسمت \overline{DE} فقطعت \overline{AC} في و أثبت أن :

- ١ \overline{BO} ينصف \overline{DE}
- ٢ $DO = \frac{1}{3} AO$



مسائل التفوق

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب ح Δ فيه \overline{AD} متوسط ، $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ،
 بحيث $AM = 12$ ، $BM = 9$ ، $DM = 6$ ، $EM = 5$ ،
 $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ،
 أوجد طول \overline{DO}

١٧ أ ب ح Δ فيه \overline{AD} ، \overline{BE} متوسطان ، $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ، رسم \overline{DE} فقطع \overline{AC} في و ، $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$ ،
 بحيث $AM = 12$ ، $BM = 9$ ، $DM = 6$ ، $EM = 5$ ،
 أثبت أن : $AM = 12$ ، $BM = 9$ ، $DM = 6$ ، $EM = 5$

١٨ أ ب ح Δ ، م نقطة تقاطع متوسطاته \overline{AD} ، \overline{BE} ، \overline{CF} ،
 أثبت أن : م نقطة تقاطع متوسطات ΔDOR

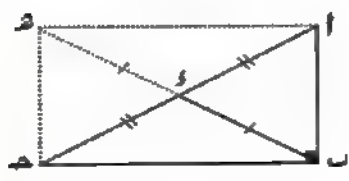


متوسط المثلث القائم



نظرية

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث



أ ب ح مثلث فيه $\angle A = 90^\circ$

\overline{AD} متوسط في ΔABC

إثبات أن $AD = \frac{1}{2} BC$

ترسم \overline{AD} وناخذ نقطة $D \in \overline{BC}$

بحيث $AD = \frac{1}{2} BC$

المعطيات

المطلوب

العمل

البرهان

الشكل أ ب ح فيه $\angle A = 90^\circ$ ، \overline{AD} ينصف كل منهما الآخر

الشكل أ ب ح فيه $\angle A = 90^\circ$ ، \overline{AD} ينصف كل منهما الآخر

الشكل أ ب ح فيه $\angle A = 90^\circ$ ، \overline{AD} ينصف كل منهما الآخر

الشكل أ ب ح فيه $\angle A = 90^\circ$ ، \overline{AD} ينصف كل منهما الآخر



فمثلاً : إذا كان ΔABC قائم الزاوية في ب ،

$\angle B = 90^\circ$ ، \overline{AD} ينصف \overline{AC}

فإن طول المتوسط $\overline{AD} = \frac{1}{2} AC$

عكس النظرية

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من إحدى رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



أ ب ح مثلث ، ب د متوسط ،

$$ا ب = ب د = د ح$$

إثبات أن (ب د ا ب ح) = ٩٠°

نرسم ب د و نأخذ نقطة ه ب د ∩ د ح

$$ب ح ب د = د ح د ح$$

$$ب د = د ح = د ب = د ح = د ح$$

$$ب د = د ح$$

∴ الشكل أ ب ح د فيه أ ه ، ب د متساويان في الطول

و ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب ح د مستطيل

$$∴ (ب د ا ب ح) = ٩٠°$$

فتشأ : في Δ أ ب ح

إذا كان طول المتوسط

$$ب د = \frac{1}{2} \text{ طول أ ح}$$

فإن Δ أ ب ح قائم الزاوية في ب

أي في الزاوية التي خرج منها المتوسط وإذا كان

$$ا ب = ٩٠° ، و منتصف أ ه ، ب د = د ح فإن (ب د ا ب ح) = ٩٠°$$



نتيجة هامة

طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر



فتشأ : في Δ أ ب ح القائم الزاوية في ب ،

$$ا ب = ٣٠° \text{ إذا كان } ا ب = ٩٠°$$

فإن أ ب = ب د لأنه الضلع المقابل

للزاوية التي قياسها ٣٠°

ملاحظة

المثلث القائم الزاوية الذي قياس إحدى زواياه ٣٠° يكون قياس الزاوية الثالثة فيه ٦٠° ولذلك يسمى مثلث ثلاثيني ستيني

أمثلة توضيحية



١ في الشكل المقابل :

$$ا ب ح د فيه ا ب = ٩٠° ، ا ب = ٩٠°$$

$$ا ب = ٣٠° ، ا ب = ٩٠° ، ا ب = ٩٠°$$

و منتصف أ ه ، ب د محيط Δ أ ب د

ب د الحل

$$ا ب = ٩٠° ، ا ب = ٣٠° ، ا ب = ٩٠° ، ا ب = ٩٠°$$

محيط Δ أ ب د

$$∴ ا ب ح د قائم الزاوية في ب ، ا ب = ٣٠° ، ا ب = ٩٠°$$

$$ا ب = \frac{1}{2} \text{ طول أ ح} = د ح$$

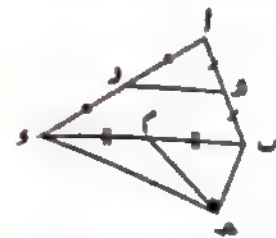
$$∴ و منتصف أ ه ، ا ب = د ح = د ح$$

$$∴ ب د متوسط في Δ أ ب ح القائم الزاوية في ب$$

$$ا ب = د ح = د ح = د ح$$

$$\text{محيط } \Delta ا ب د = ا ب + ب د + د ا$$

$$٩٥ = ٥ + ٥ + ٥ =$$



في الشكل المقابل:

أ ب هـ شكل رياضي فيه
 ن (د ب هـ) = ٩٠° ، هـ د ، و ،
 م منتصفات أ ب ، آ و ، ب و على الترتيب
 أثبت أن : هـ م = و د

كيفية الحل

المعطيات : ن (د ب هـ) = ٩٠° ، هـ د ، و ، م منتصفات أ ب ، آ و ، ب و
 المطلوب : هـ م = و د
 البرهان :
 Δ ب هـ د وفيه ن (د ب هـ) = ٩٠° ، هـ م متوسط
 ∴ هـ م = $\frac{1}{2}$ ب و (نظرية (١))
 Δ أ ب و فيه هـ منتصف أ ب ، و منتصف آ و
 ∴ و د = $\frac{1}{2}$ ب و (نظرية (٢))
 من (١) ، (٢) ينتج أن :
 هـ م = و د

#

أمثلة لتدريب

تدريب (١)



في الشكل المقابل:

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
 ن (د ب هـ) = ٣٠° ، هـ د = ٨ سم ،
 و منتصف أ هـ

أكمل البرهان الآتي لإيجاد محيط Δ أ ب و

المعطيات :
 المطلوب :

البرهان

∴ و منتصف أ هـ ∴ ب و متوسط في Δ أ ب هـ
 ∴ ن (ب و د) = ٩٠° ∴ ب و =
 (١) ∴ أ هـ = ∴ ب و =
 ∴ Δ أ ب هـ وفيه ن (ب و د) = ٩٠° ، ب و =
 ∴ ب و =
 (٢) ∴ أ ب =
 ∴ و منتصف أ هـ ، هـ د = ٨ ∴
 (٣) ∴
 من (١) ، (٢) ، (٣) :
 ∴ محيط Δ أ ب و = + +
 ∴ محيط Δ أ ب و = + + #

تدريب (٢)

في الشكل المقابل:



ن (د ب هـ) = ٩٠° ، هـ د =
 ن (د ب هـ) = ٣٠° ، هـ منتصف أ هـ
 أكمل البرهان الآتي لإثبات أن أ ب = و د

المعطيات :
 المطلوب :
 البرهان :
 ∴ Δ أ ب هـ وفيه ن (د ب هـ) = ٩٠° ، هـ د =
 (١) ∴
 ∴ و منتصف أ هـ ∴ ب و متوسط في Δ
 ∴ Δ أ ب هـ وفيه ن (د ب هـ) = ٩٠° ، ب و متوسط
 ∴ و د =
 (٢)
 من (١) ، (٢) ينتج أن
 #

على متوسط المثلث القائم

نماد ١٢

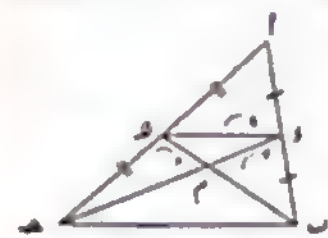
نولاً: راجع منا واختبر نفسك

١٠

(١) اعمل ما يأتي:

- متوسطات المثلث لتقاطع
- نقطة لتقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة من جهة القاعدة
- إذا كان \overline{AD} متوسط في ΔABC ، M نقطة لتقاطع متوسطاته
فإن $AM : MD = \dots\dots\dots$
- إذا كان \overline{AD} متوسط في ΔABC ، M نقطة لتقاطع متوسطاته وكان $AM = 4$
فإن $AD = \dots\dots\dots$

(ب) فم الشكل المقابل:



- \overline{AD} ، \overline{BE} ، \overline{CF} متوسطات في ΔABC
متقاطعت في M ، $AM = 3$ ، $MD = 2$
 $BM = 4$ ، $ME = 2$ أو $BM = 2$ ، $ME = 4$
أو $CM = 3$ ، $MF = 2$ أو $CM = 2$ ، $MF = 3$

٣

(ج) $ABC \Delta$ ، \overline{AD} منتصف \overline{BC} ، $M \in \overline{AD}$ بحيث $AM = 2$ ، $MD = 3$
رسم \overline{DM} قطع \overline{AB} في E فإذا كان $DE = 12$ أو $DE = 17$ أو $DE = 19$

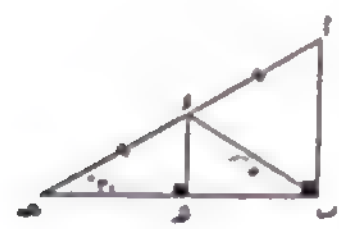
٢

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

(٢) اعمل ما يأتي:

(أ) فم الشكل المقابل:



- $ABC \Delta$ قائم الزاوية في C
و منتصف \overline{BC} ، D ، \overline{AD} ، $\overline{BE} \perp \overline{AD}$
 $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$ فإن:
① $AB = \dots\dots\dots$ ، $AC = \dots\dots\dots$
② $AD = \dots\dots\dots$ ، $BD = \dots\dots\dots$

(ب) فم الشكل المقابل:



- $ABC \Delta$ قائم الزاوية في C
و منتصف \overline{BC} ، D ، \overline{AD} ، $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ فإن:
① $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$
② $AB = \dots\dots\dots$ ، $AC = \dots\dots\dots$
③ $AD = \dots\dots\dots$ ، $BD = \dots\dots\dots$
④ محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$

(ج) فم الشكل المقابل:



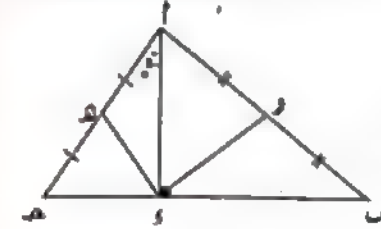
- $ABC \Delta$ قائم الزاوية في C
 $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$
 \overline{AD} ، $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ على الترتيب،
و منتصف \overline{BC} ، D ، \overline{AD} ، $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ فإن:
① $AB = \dots\dots\dots$ ، $AC = \dots\dots\dots$
② $AD = \dots\dots\dots$ ، $BD = \dots\dots\dots$
③ $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$
④ محيط $\Delta ABC = \dots\dots\dots$



3 اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- 1 طول متوسط Δ القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي الوتر
[طول أو نصف طول أو ضعف طول أو ثلث طول]
- 2 طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° في أي مثلث يساوي
[طول الوتر أو نصف طول الوتر أو ضعف طول الوتر أو ليس أي منها لأن المثلث ليس قائم]
- 3 طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° في Δ القائم الزاوية يساوي الوتر
[نصف طول أو ضعف طول أو طول أو ثلث طول]

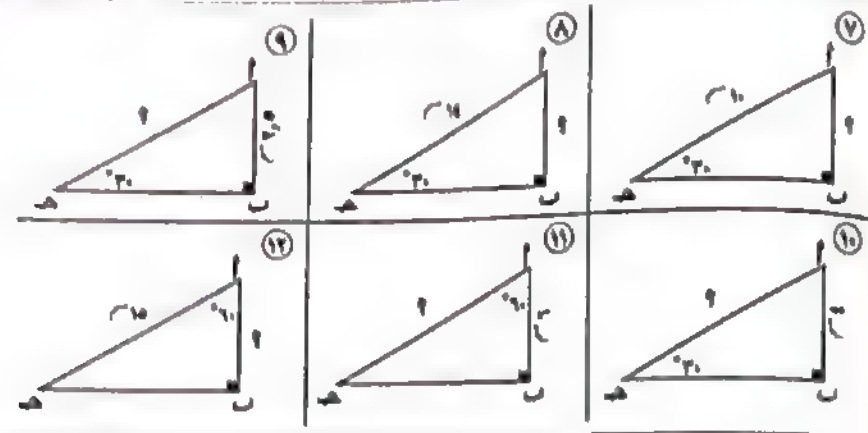
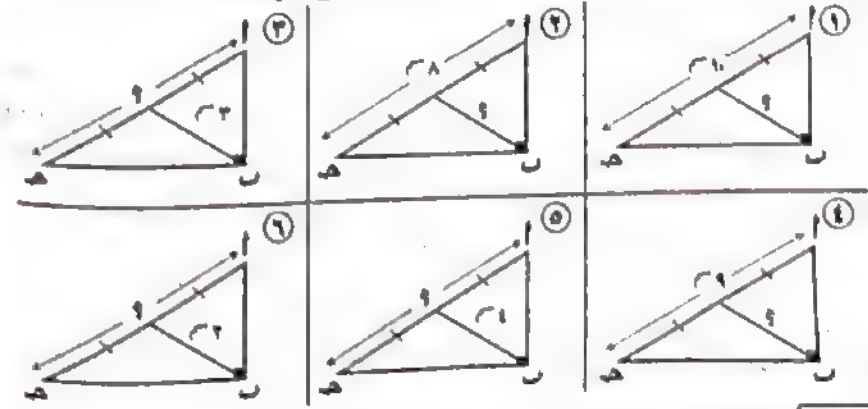
4 في الشكل المقابل :



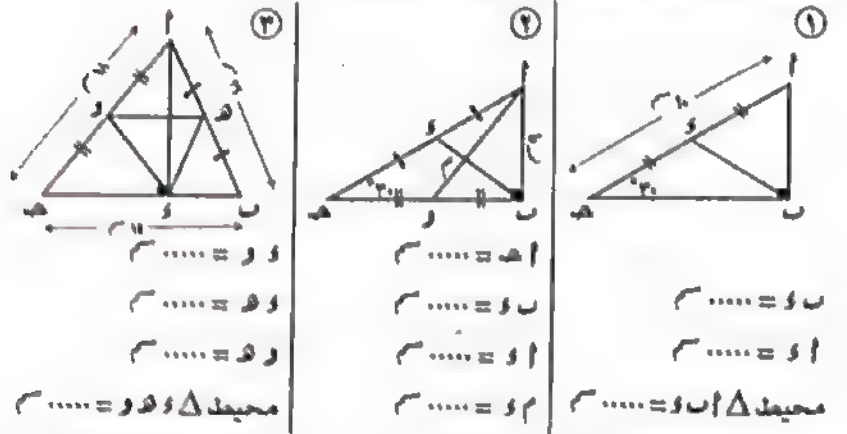
إذا كان $AD \perp BC$ ، ومنتصف AB ،
ومنتصف AC ، Q ، $(AD \perp BC)$ ، 30° ،
 $AB = 10$ ، $BD = 4$ ، $DC = 5$ ، فإن :

$AD = \dots\dots\dots$	أ	ب	ج	د	هـ
$AD = \dots\dots\dots$	أ	ب	ج	د	هـ
$AD = \dots\dots\dots$	أ	ب	ج	د	هـ
$AD = \dots\dots\dots$	أ	ب	ج	د	هـ

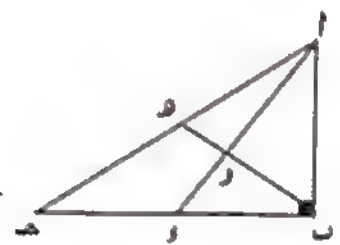
5 أوجد مستقيماً بالمعطيات التي على الرسم أطوال الأضلاع التي عليها العلامة (٩) :



6 أكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :



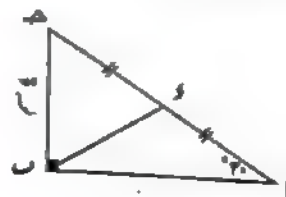
6 في الشكل المقابل :



أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
ب د ، AD متوسطان متقاطعان في د
فإذا كان $AD = 12$ ،
فاوجد طول ب د



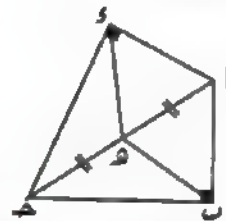
٧ في الشكل المقابل :



[٣٧]

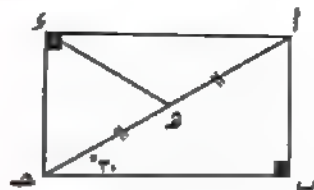
أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ، $\angle ب = 30^\circ$ ،
و منتصف $\overline{أهـ}$ ، $\overline{أهـ} = ٤$ سم
أثبت أن Δ و ب هـ متساوي الأضلاع
وأوجد محيطه

٨ في الشكل المقابل :



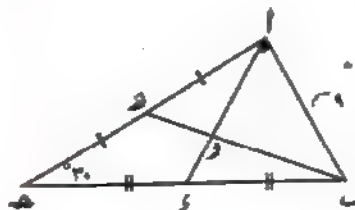
أ ب هـ و شكل رباعي فيه
 $\angle ب = \angle د = 90^\circ$ ،
و منتصف $\overline{أهـ}$
أثبت أن $\overline{أهـ} = \overline{هـد}$

٩ في الشكل المقابل :



أ ب هـ و مستطيل فيه
 $\angle ب = \angle د = 90^\circ$ ،
و منتصف $\overline{أهـ}$
أثبت أن $\overline{أهـ} = \overline{هـد}$

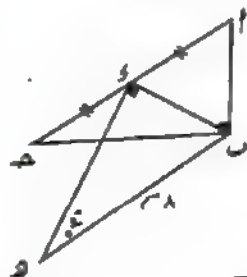
١٠ في الشكل المقابل :



[٣٨]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في أ ،
و منتصف $\overline{أهـ}$ ، و منتصف $\overline{أهـ}$ ،
و $\overline{أهـ} \cap \overline{أهـ} = \{هـ\}$ ، $\angle ب = 30^\circ$ ،
 $\angle د = 90^\circ$ ، $\angle هـ = 120^\circ$
أوجد محيط Δ ب و د

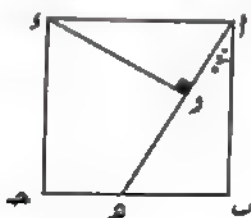
١١ في الشكل المقابل :



[٣٨]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
و منتصف $\overline{أهـ}$ ، رسم $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$
بحيث $\angle ب = \angle د = 30^\circ$ ،
إذا كان $\overline{أهـ} = ٨$ فأوجد طول $\overline{أهـ}$

١٢ في الشكل المقابل :



[٣٩]

أ ب هـ و مربع ، $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$
بحيث $\angle ب = \angle د = 30^\circ$ ، و $\overline{أهـ} = ٤$ سم
بحيث $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$ فإذا كان $\overline{أهـ} = ٥$ سم
فأوجد : مساحة المربع

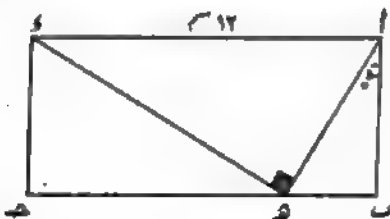
١٣ في الشكل المقابل :



[٣٤]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
 $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$ ، $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$ ،
 $\angle ب = \angle د = 30^\circ$ ، $\angle هـ = 90^\circ$ ،
أوجد طول $\overline{أهـ}$

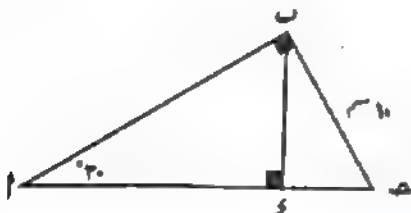
١٤ في الشكل المقابل :



[٣٣]

أ ب هـ و مستطيل ، $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$
بحيث $\angle ب = \angle د = 90^\circ$ ، $\angle هـ = 120^\circ$ ،
فإذا كان $\angle ب = 30^\circ$ ،
فأوجد طول $\overline{أهـ}$

١٥ في الشكل المقابل :

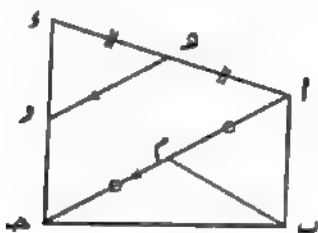


[٣٥]

أ ب هـ Δ قائم الزاوية في ب ،
 $\angle ب = \angle د = 30^\circ$ ، $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$
بحيث $\overline{أهـ} \perp \overline{أهـ}$ فإذا كان $\overline{أهـ} = ٨$ سم
فأوجد طول $\overline{أهـ}$



أثبت أن Δ ب و ه قائم الزاوية في و
أخذت نقطة و بحيث و ه = ٣ سم
و منتصف ب ه ، و = ٣ سم
أثبت أن Δ قائم الزاوية في و



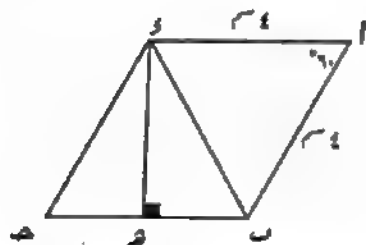
❸ في الشكل المقابل :

ا ب ح د و شكل رباعي ، هـ م متتصلي
 ا و ، ا هـ على الترتيب ، و د و هـ ،
 هـ و // ا هـ ، ب م = د هـ و
 ا ب د ا ن = ٩٠ °



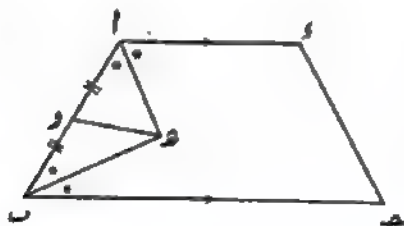
مسائل المتفوقين

❧ في الشكل المقابل :



١ ب هـ و م ع ن
 طول ضلعه ٣٤ ، ق (١٥) = ٩٠° ،
 د ٣ ب هـ ب ح ي ث و ق ا ب هـ
 أثبت ان : ١) و هـ متوسط في Δ و ب هـ
 ٢) Δ و ب هـ متساوي الأضلاع

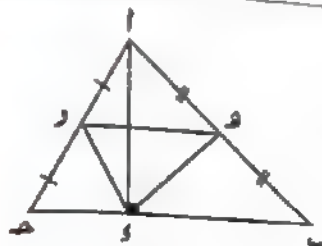
٢٤ في الشكل المقابل :



ا ب د ه شكل رياضي فيه
 $\overline{ا د} // \overline{ب ه}$ ، $\overline{ا ب}$ ينصف $\overline{ا د}$ ،
 $\overline{ب ه}$ ينصف $\overline{ا د}$ ، ومنتصف $\overline{ا ب}$
 أثبت ان : $و = \frac{1}{4} ا ب$



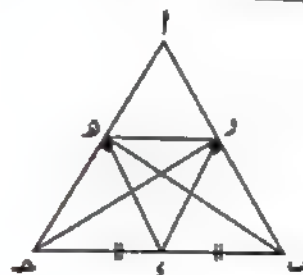
٦٦ **الفصل في الشكل المقابل :**



ا ب ح د ، د ، و منتصفى ا ب ، ا د
 على الترتيب ، ا و ا ب ح د يقطعها في و ،
 ا ب = ١٠ ، ا ب ح د = ١٢ ، ا د = ٨
 احس محيط Δ و د و

[୪୭]

٧٧ في الشكل المقابل :

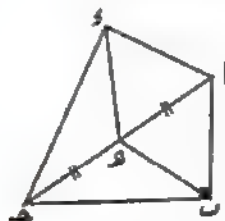


ا ب ح د ، و ز ح ط ث د ا ب ،
 و متتمة ف ح ، و ا ب
 ح ط ث د ا ب

أثبت أن: Δ و δ و ρ متساوي الساقين

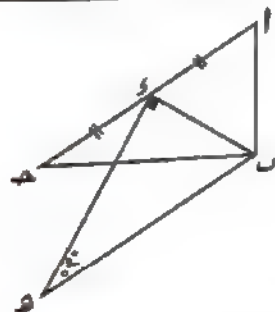
٧٨) ا ب هـ مثلث ، و منتصف ا هـ فإذا كان $\angle ٩٠ = \angle ١٠$ ، $\angle ٥ = \angle ٣$
فأثبت أن : $\angle ٧ = (\angle ا ب هـ)^\circ$

❶ في الشكل المقابل :



ا ب ح Δ قائم الزاوية في ب ،
 ه منتصف ا ب ، ب ه = 4 سم ،
 أخذت النقطة د بحيث ه د = 4 سم
 أثبت أن : $\angle ا د ح = 90^\circ$

٢٠ في الشكل المقابل :



ثبت أن: ΔABC قائم الزاوية في B
 $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $AC = 5$ ، $\angle C = 90^\circ$ ،
 و \overline{AD} و \overline{BE} حيث D على BC و E على AC ،
 و $\overline{AD} \perp \overline{BE}$ ، و \overline{AD} و \overline{BE} يتقاطعا في F ،

المثلث المتساوي الساقين

يصنف المثلث تبعاً لزواياه أو تبعاً لأضلاعه

- يصنف المثلث حسب قياسات زواياه إلى ثلاث أنواع هي :
 - ① مثلث حاد الزوايا ويكون فيه جميع زواياه حادة
 - ② مثلث قائم الزاوية ويكون فيه إحدى زواياه قائمة
 - ③ مثلث منفرج الزاوية ويكون فيه إحدى زواياه منفرجة
- مع ملاحظة أن المثلث لا يمكن أن يحتوي على أكثر من زاوية واحدة قائمة أو منفرجة وأن المثلث يحدد نوعه حسب نوع أكبر زواياه
- ويصنف المثلث حسب أطوال أضلاعه إلى ثلاث أنواع أيضاً وهي :



③ مثلث متساوي الأضلاع
(أو متطابق الضلعين)
وهو مثلث فيه جميع أضلاعه متساوية في الطول



② مثلث متساوي الساقين
(أو متطابق الضلعين)
وهو مثلث فيه ضلعان متساويان في الطول



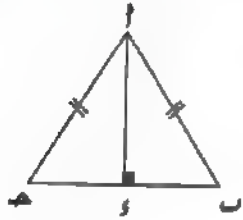
① مثلث مختلف الأضلاع
وهو مثلث أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة

فمثلاً : المثلث ABC فيه $AB = AC$ ، يسمى الضلعان المتساويان AB ، AC بساقي المثلث ويسمى الضلع الثالث BC قاعدة المثلث وتسمى $\angle B$ ، $\angle C$ بزوايتي القاعدة (وهما بنفس الحرفين المسمى بهما القاعدة) وتسمى $\angle A$ بزاوية رأس المثلث



نظرية المثلث المتساوي الساقين

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



المعطيات $\triangle ABC$ فيه $AB \equiv AC$

المطلوب $\angle B \equiv \angle C$

العمل نرسم $AD \perp BC$

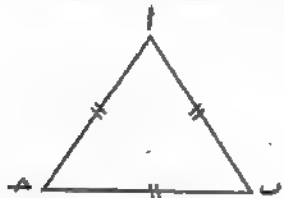
البرهان $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ ، $\therefore \angle B \equiv \angle C$

$\angle B \equiv \angle C$ (ب) $\angle B \equiv \angle C$ (ب) $\angle B \equiv \angle C$ (ب) عملاً
فيهما $AB \equiv AC$ معطى
أو ضلع مشترك

$\therefore \triangle ADB \equiv \triangle ADC$ وينتج من التطابق أن $\angle B \equiv \angle C$

نتيجة

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة (متساوية في القياس) ويكون قياس كل منها 60°



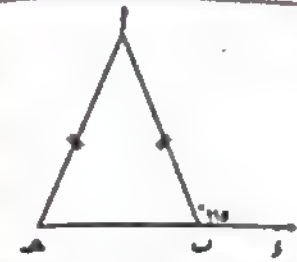
فمثلاً : إذا كان $\triangle ABC$ فيه $AB = AC = BC$
فإن $\angle B = \angle C = \angle A = 60^\circ$

تذكر أن

- قياس أي زاوية خارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة لها
- كمالات الزوايا المتساوية في القياس تكون متساوية في القياس أيضاً
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله 180°



أشكال توضيحية



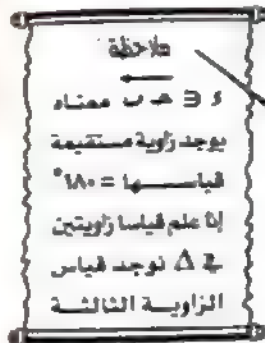
في الشكل المقابل:

$\angle C = 110^\circ$
 $\angle B = 120^\circ$
 احس قياسات زوايا $\triangle ABC$

الحل

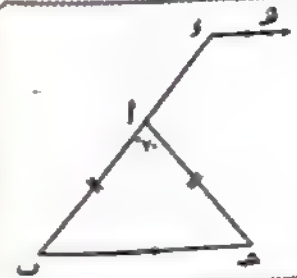
المعطيات
 المطلوب
 البرهان

$\angle C = 110^\circ$
 $\angle B = 120^\circ$
 $\angle A = 180^\circ - 110^\circ - 120^\circ = 50^\circ$



#

في الشكل المقابل:



$\angle A = 70^\circ$
 $\angle B = 120^\circ$
 أوجد: $\angle C$

الحل

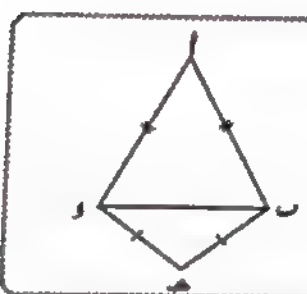
المعطيات
 المطلوب
 البرهان

$\angle A = 70^\circ$
 $\angle B = 120^\circ$
 $\angle C = 180^\circ - 70^\circ - 120^\circ = 90^\circ$

الحل

المعطيات
 المطلوب
 البرهان

$\angle A = 70^\circ$
 $\angle B = 120^\circ$
 $\angle C = 90^\circ$



في الشكل المقابل:

$\angle A = 70^\circ$
 $\angle B = 120^\circ$
 أثبت أن $\angle C = 90^\circ$



في الشكل المقابل:



$\angle A = 120^\circ$
 $\angle B = 130^\circ$
 $\angle C = 140^\circ$
 $\angle D = 150^\circ$
 $\angle E = 160^\circ$

في الشكل

المعطيات: $\angle A = 120^\circ$

المطلوب: $\angle B = 130^\circ$

المطلوب: $\angle C = 140^\circ$

المطلوب: $\angle D = 150^\circ$

المطلوب: $\angle E = 160^\circ$ (المطلوب: $\angle F = 170^\circ$)

المطلوب: $\angle G = 180^\circ$

المطلوب: $\angle H = 190^\circ$

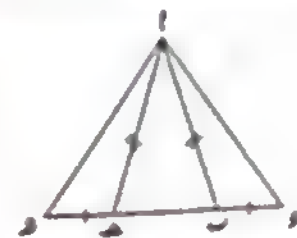
المطلوب: $\angle I = 200^\circ$

المطلوب: $\angle J = 210^\circ$

المطلوب: $\angle K = 220^\circ$



في الشكل المقابل:



$\angle A = 120^\circ$
 $\angle B = 130^\circ$
 $\angle C = 140^\circ$
 $\angle D = 150^\circ$
 $\angle E = 160^\circ$

في الشكل



المطلوب: $\angle A = 120^\circ$

المطلوب: $\angle B = 130^\circ$

المطلوب: $\angle C = 140^\circ$

المطلوب: $\angle D = 150^\circ$

المطلوب: $\angle E = 160^\circ$

المطلوب: $\angle F = 170^\circ$

المطلوب: $\angle G = 180^\circ$

المطلوب: $\angle H = 190^\circ$

المطلوب: $\angle I = 200^\circ$

المطلوب: $\angle J = 210^\circ$

المطلوب: $\angle K = 220^\circ$

المطلوب: $\angle L = 230^\circ$

المطلوب: $\angle M = 240^\circ$

المطلوب: $\angle N = 250^\circ$

المطلوب: $\angle O = 260^\circ$

المطلوب: $\angle P = 270^\circ$

المطلوب: $\angle Q = 280^\circ$

المطلوب: $\angle R = 290^\circ$

المطلوب: $\angle S = 300^\circ$

المطلوب: $\angle T = 310^\circ$

المطلوب: $\angle U = 320^\circ$

المطلوب: $\angle V = 330^\circ$

المطلوب: $\angle W = 340^\circ$

المطلوب: $\angle X = 350^\circ$

المطلوب: $\angle Y = 360^\circ$

المطلوب: $\angle Z = 370^\circ$

المطلوب: $\angle A = 380^\circ$

المطلوب: $\angle B = 390^\circ$

المطلوب: $\angle C = 400^\circ$

المطلوب: $\angle A = 120^\circ$

المطلوب: $\angle B = 130^\circ$

المطلوب: $\angle C = 140^\circ$

المطلوب: $\angle D = 150^\circ$

المطلوب: $\angle E = 160^\circ$

المطلوب: $\angle F = 170^\circ$

المطلوب: $\angle G = 180^\circ$

المطلوب: $\angle H = 190^\circ$

المطلوب: $\angle I = 200^\circ$

المطلوب: $\angle J = 210^\circ$

المطلوب: $\angle K = 220^\circ$

المطلوب: $\angle L = 230^\circ$

المطلوب: $\angle M = 240^\circ$

المطلوب: $\angle N = 250^\circ$

المطلوب: $\angle O = 260^\circ$

المطلوب: $\angle P = 270^\circ$

المطلوب: $\angle Q = 280^\circ$

المطلوب: $\angle R = 290^\circ$

المطلوب: $\angle S = 300^\circ$

المطلوب: $\angle T = 310^\circ$

المطلوب: $\angle U = 320^\circ$

المطلوب: $\angle V = 330^\circ$

المطلوب: $\angle W = 340^\circ$

المطلوب: $\angle X = 350^\circ$

المطلوب: $\angle Y = 360^\circ$

المطلوب: $\angle Z = 370^\circ$

المطلوب: $\angle A = 380^\circ$

المطلوب: $\angle B = 390^\circ$

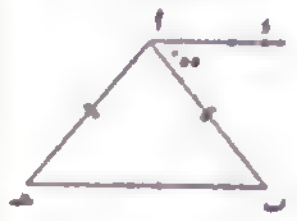
المطلوب: $\angle C = 400^\circ$

المطلوب: $\angle D = 410^\circ$

أشكال لتقريب

تقريب (١)

في الشكل المقابل:



المطلوب: $\angle A = 120^\circ$

المطلوب: $\angle B = 130^\circ$

المطلوب: $\angle C = 140^\circ$

المطلوب: $\angle D = 150^\circ$

المطلوب: $\angle E = 160^\circ$

المطلوب: $\angle F = 170^\circ$

المطلوب: $\angle G = 180^\circ$

المطلوب: $\angle H = 190^\circ$

المطلوب: $\angle I = 200^\circ$

المطلوب: $\angle J = 210^\circ$

المطلوب: $\angle K = 220^\circ$

المطلوب: $\angle L = 230^\circ$

المطلوب: $\angle M = 240^\circ$

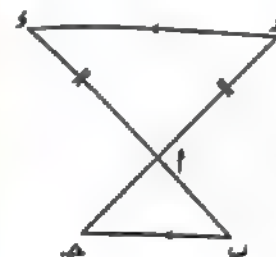
المطلوب: $\angle N = 250^\circ$

المطلوب: $\angle O = 260^\circ$

المطلوب: $\angle P = 270^\circ$



تدريب (٢)



في الشكل المقابل :

$$AB \parallel CD, \quad \angle A = 40^\circ$$

$$\angle C = 40^\circ$$

أكمل ما يأتي لإثبات أن $AD \parallel BC$:

المعطيات

المطلوب

المبرهان

$$\because \angle A = 40^\circ, \quad \angle C = 40^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle C \quad \text{بالتالي} \quad (1)$$

$$\because \angle A = 40^\circ, \quad \angle C = 40^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle C \quad \text{بالتالي} \quad (2)$$

$$\therefore \angle A = \angle C \quad \text{بالتالي} \quad (3)$$

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن :

$$\therefore AD \parallel BC$$

أهلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية
شرح ومراجعة وأهم الأسئلة المتوقعة لامتحان
امتحانات إضافية من السنوات السابقة



تمارين (٣)

على المثلث المتساوي الساقين

أسئلة الزاوية

ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

(١) أكمل ما يأتي :

١) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي

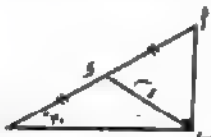
٢) طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° في المثلث القائم الزاوية يساوي

٣) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة من جهة الرأس

٤) في الشكل المقابل :

محيط $\triangle ABC$

$$= \dots\dots\dots$$



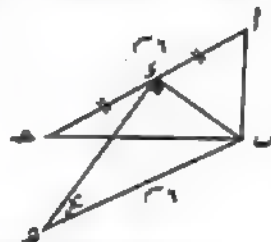
(ب) في الشكل المقابل :

BC متوسط في $\triangle ABC$ ،

$$\angle B = 40^\circ, \quad \angle C = 40^\circ$$

$$AB = BC = CA = 6 \text{ cm}$$

$$\text{ثم اثبت أن : } \angle A = 100^\circ$$



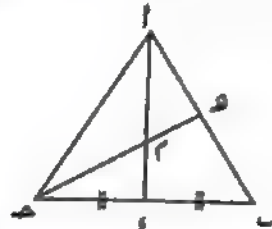
(ج) في الشكل المقابل :

$AB = AC$ فيه D منتصف BC ،

$$AD \perp BC, \quad \angle A = 100^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 40^\circ$$

$$\text{اثبت أن : } AD = \frac{1}{2} BC$$





ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

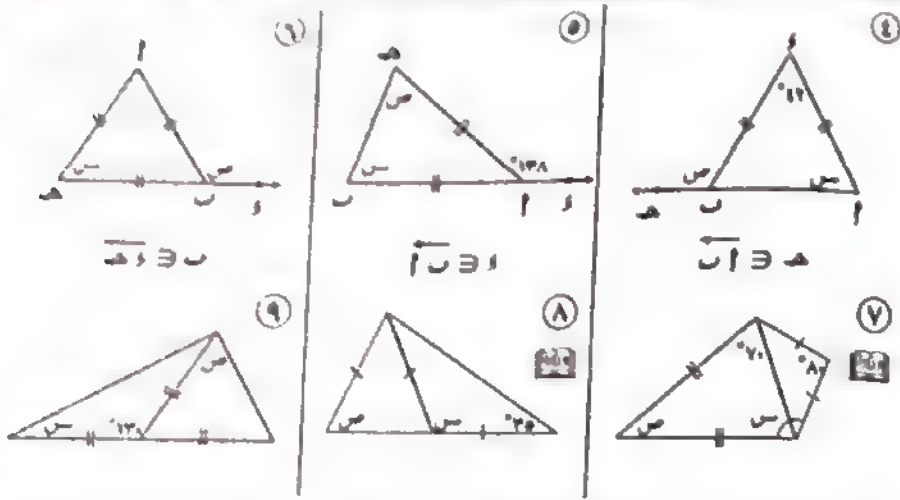
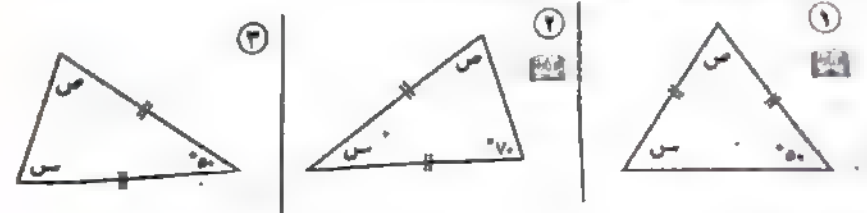
٢) أعمل ما يأتي :

- ١) رابعتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين
- ٢) إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة
- ٣) في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة 40° فإن المثلث
- ٤) في Δ ABC إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$ فإن $\angle B = (\dots\dots\dots)$ و $\angle C = (\dots\dots\dots)$
- ٥) إذا كان $AB = AC$ مثلثاً قائم الزاوية في A ، $AB = AC$ فإن $\angle B = (\dots\dots\dots)$ و $\angle C = (\dots\dots\dots)$

٣) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

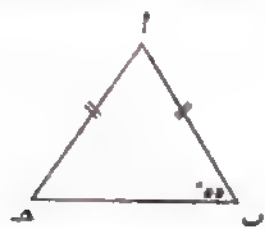
- ١) المثلث المتساوي الساقين الذي قياس زاوية رأسه 50° يكون قياس إحدى زاويتي قاعدته = [90° ، 65° ، 40° ، 50°]
- ٢) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع = [30° ، 90° ، 120° ، 60°]
- ٣) في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة 65° فإن قياس زاوية رأسه = [50° ، 60° ، 70° ، 90°]
- ٤) مجموع قياس زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الأضلاع = [40° ، 120° ، 180° ، 60°]
- ٥) في Δ ABC مع $AB \parallel AC$ إذا كان $\angle C = 90^\circ$ فإن $\angle A = (\dots\dots\dots)$ [90° ، 45° ، 60° ، 30°]

٤) في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x ، y :



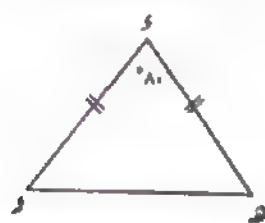
٥) في الشكل المقابل :

$AB = AC$ فيه
 $\angle A = 50^\circ$
 أوجد : $\angle B$ و $\angle C$



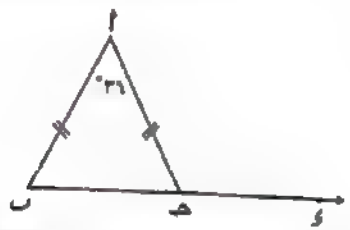
٦) في الشكل المقابل :

$AB = AC$ فيه
 $\angle B = 70^\circ$
 $\angle C = 70^\circ$
 أوجد : $\angle A$



٧) في الشكل المقابل :

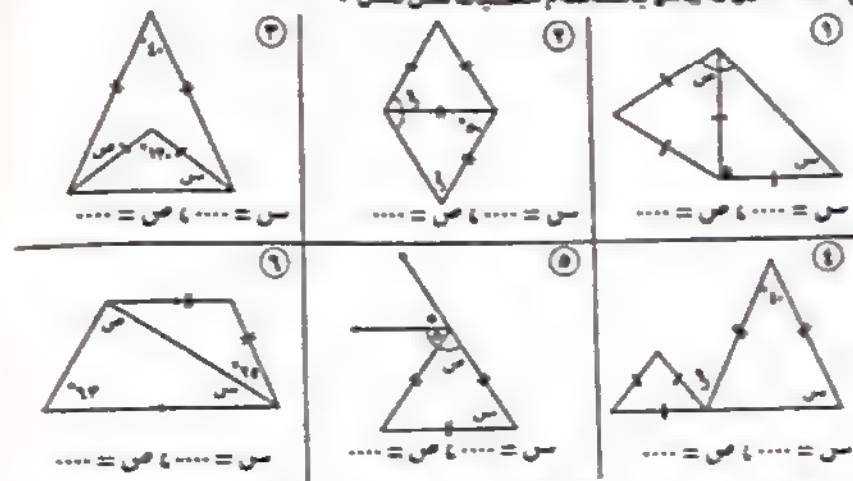
$AB = AC$ فيه $\angle A = 36^\circ$
 $\angle B = 72^\circ$ و $\angle C = 72^\circ$
 أوجد : $\angle B$ و $\angle C$



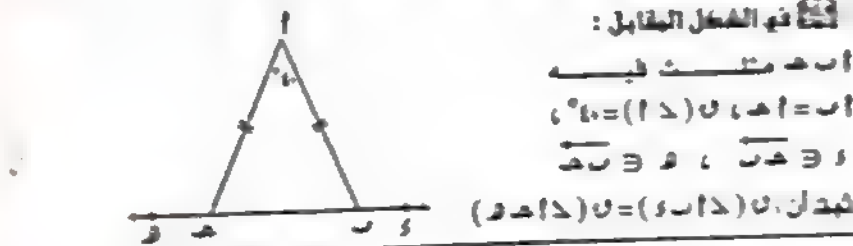


مسائل المستوى الثاني

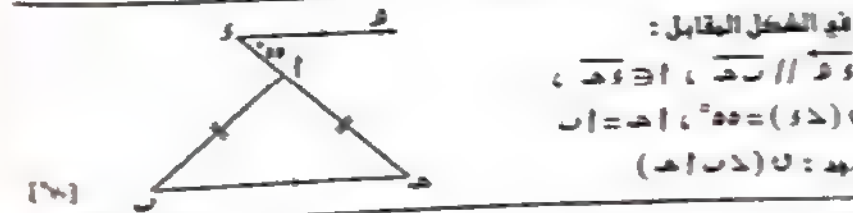
أ) أكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :



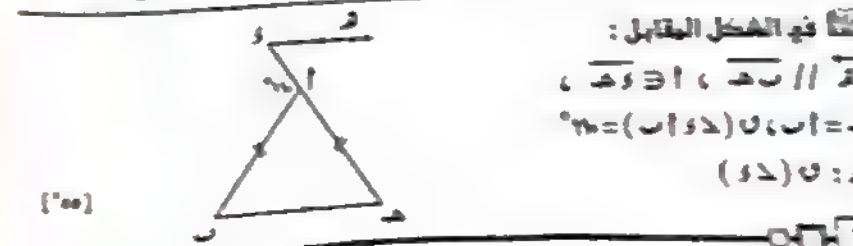
ب) في الشكل المقابل :



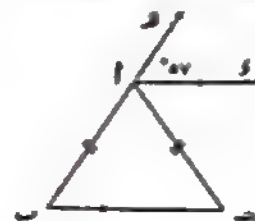
ج) في الشكل المقابل :



د) في الشكل المقابل :

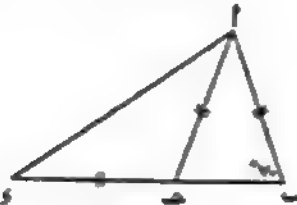


في الشكل المقابل :



أ) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ،
 $\angle A = \angle C$ ، $\angle B = \angle D$ ،
 أوجد : $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ،
 اثبت أن : \overline{AC} ينصف \overline{BD} و

في الشكل المقابل :



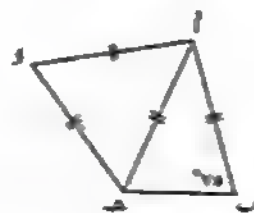
أ) $\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $\angle B = \angle C$ ،
 $\angle A = 70^\circ$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ،
 أوجد : $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ،
 اثبت أن : \overline{AD} ينصف \overline{BC} و

في الشكل المقابل :



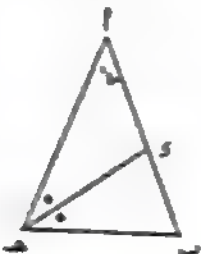
أ) $\angle A = 35^\circ$ ،
 $\angle B = 45^\circ$ ، $\angle C = 100^\circ$ ،
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AB} = \overline{AC}$ ،
 أوجد : $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ،
 اثبت أن : \overline{AD} ينصف \overline{BC} و

في الشكل المقابل :



أ) $\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $\angle B = \angle C$ ،
 $\angle A = 70^\circ$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ،
 أوجد : $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ،
 اثبت أن : \overline{AD} ينصف \overline{BC} و

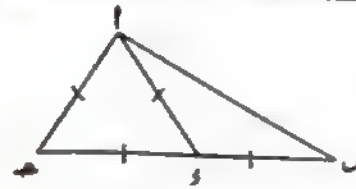
في الشكل المقابل :



أ) \overline{AD} ينصف \overline{BC} ،
 حيث $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ،
 $\angle A = 70^\circ$ ، $\angle B = 45^\circ$ ،
 أوجد : $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ،
 اثبت أن : \overline{AD} ينصف \overline{BC} و

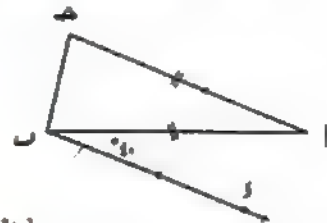


٧) في الشكل المقابل :



أ ب ح Δ فيه
د منتصف ب ح ،
أ د = د ح = ح ع
اثبت أن : ن (د ب ا ح) = 90°

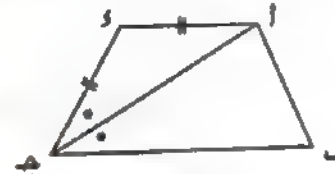
٨) في الشكل المقابل :



أ ب ح // د ب ، ا ب = ا ح ،
ن (د ب ا ح) = 90°
أوجد : قياسات زوايا Δ ا ب ح

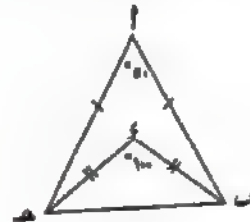
[$70^\circ, 40^\circ, 70^\circ$]

٩) في الشكل المقابل :



أ ب ح شكل رباعي فيه
ا د = ح د ، ح د // ا ب ح
اثبت أن : ا د // ح د

١٠) في الشكل المقابل :

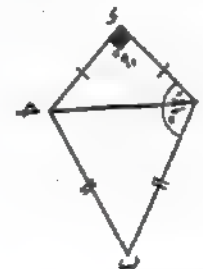


أ ب = ا ح ، د ب = د ح ،
ن (د ب ا ح) = 90° ، ن (د ح ا ب) = 90°
أوجد : ١) ن (د ب ا ح) ٢) ن (د ح ا ب)

[90°]

[90°]

١١) في الشكل المقابل :



ا د = ح د ، ا ب = ح ب ،
ن (د ب ا ح) = 120° ،
ن (د ح ا ب) = 90°
أوجد : ن (د ب ا ح)

[30°]

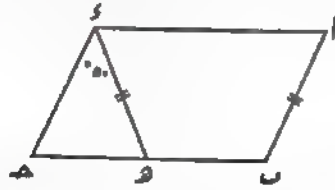


١٢) في الشكل المقابل :



أ ب ح Δ فيه ا ب = ا ح ،
و د // ب ح بحيث د ح = ح ع ،
اثبت أن : Δ ا د ح متساوي الساقين

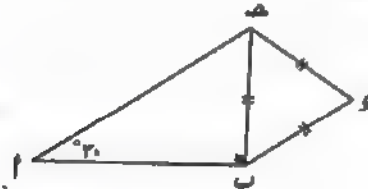
١٣) في الشكل المقابل :



أ ب ح د متوازي أضلاع
ا ب = ح د ، ن (د ب ا ح) = 50°
أوجد ن (ا د ح)

[130°]

١٤) في الشكل المقابل :



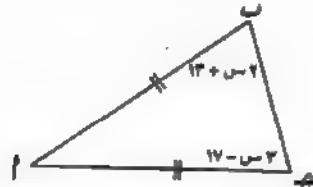
أ ب ح Δ قائم الزاوية في ب ،
ن (ا د ح) = 30° ، ب ح = ح د = د ب
١) أوجد ن (ا د ح) ٢) اثبت أن د ب // ح د

[120°]

١٥) أ ب ح Δ فيه ن (ا د ح) = 50° ، ا ب = ا ح ، رسم ب د ينصف ح د ،

ورسم ح د ينصف ا ب بحيث ب د // ح د = { د } أوجد : ن (د ب ا ح) [110°]

١٦) في الشكل المقابل :



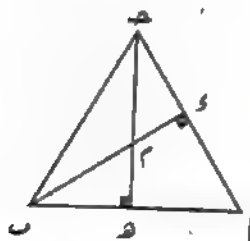
ا ب = ا ح ، ن (د ب ا ح) = $13^\circ + 2^\circ$ ،
ن (د ح ا ب) = $3^\circ - 17^\circ$
أوجد : قياسات زوايا Δ ا ب ح

[$77^\circ, 73^\circ, 74^\circ$]



مسائل التفوق

١٧) في الشكل المقابل :



ا ب = ا ح ، ب د \perp ح د ،
ح د \perp ا ب ، ح د // ب ح ، { م }
اثبت أن : ب د = ح د



عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

درسنا في الدرس السابق أنه إذا كان المثلث متساوي الساقين وكانت زاويتا القاعدة متساويتين في القياس والسؤال هو إذا حدث العكس وكانت الزاويتان متساويتان في القياس في مثلث فماذا نستنتج وهذا ما سنعرفه من خلال النظرية الآتية

نظرية

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقان ويكون المثلث متساوي الساقين



المعطيات ΔABC فيه $\angle B = \angle C$

المطلوب إثبات أن $\overline{AB} = \overline{AC}$

العمل نضع \overline{AD} نصف \overline{BC} يقطع \overline{BC} في D

البرهان

$\therefore \angle B = \angle C$

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$

$\therefore \angle B = \angle C$

\therefore مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

$\therefore \angle B = \angle C$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

\overline{AD} ضلع مشترك

فيهما $\angle ABD = \angle ACD$

$\angle B = \angle C$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

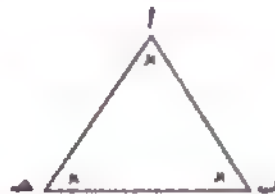
وينتج أن $\overline{AB} = \overline{AC}$

ويكون ΔABC متساوي الساقين



نتيجة

إذا تطابقت زاويتا مثلث فبسه يكون متساوي الأضلاع



أمثلاً: إذا كان ΔABC فيه

$$\angle A = \angle B = \angle C$$

$$\text{فإن } AB = BC = AC$$

ويكون المثلث متساوي الأضلاع

نتيجة

المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه 60° يكون متساوي الأضلاع

أمثلاً:



إذا كان $AB = AC$

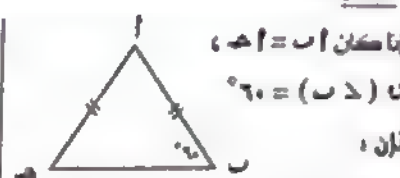
$$\angle A = 60^\circ$$

فإن:

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 60^\circ$$

$\therefore \Delta ABC$ متساوي الأضلاع



إذا كان $AB = AC$

$$\angle A = 60^\circ$$

فإن:

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 60^\circ$$

$\therefore \Delta ABC$ متساوي الأضلاع

أمثلة توضيحية

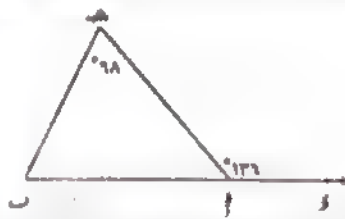
١) في الشكل المقابل:

$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$

$$\angle B = 136^\circ$$

$$\angle C = 68^\circ$$

أثبت أن ΔABC متساوي الساقين

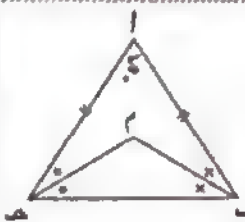


الحل



٣

في الشكل المقابل:



أ ب هـ Δ فيه $ا ب = ا ح$ ، $\angle ب = \angle ح = ٦٧^\circ$ ،
 $\overline{م} \overline{م}$ ينصف $\Delta ا ب ح$ ، $\overline{م} \overline{م}$ ينصف $\Delta ا ب ح$
 أثبت أن : $م = م$ ، $ا ج د$: $\angle م = ٦٧^\circ$

كلمة الحل

المعطيات

المطلوب

البرهان

أ ب هـ Δ فيه $ا ب = ا ح$ ، $\angle ب = \angle ح = ٦٧^\circ$ ،

$\overline{م} \overline{م}$ ينصف $\Delta ا ب ح$ ، $\overline{م} \overline{م}$ ينصف $\Delta ا ب ح$

$م = م$ ، $\angle م = ٦٧^\circ$

في $\Delta ا ب ح$: $ا ب = ا ح$

$\therefore \angle ب = \angle ح = ٦٧^\circ$

$\therefore \angle م = ٦٧^\circ$

$$\angle م = \frac{١٢٤}{٢} = \frac{\angle ب + \angle ح}{٢} = \frac{٦٧ + ٦٧}{٢} = ٦٧^\circ$$

$\therefore \overline{م} \overline{م}$ ينصف $\Delta ا ب ح$

$$\angle م = \frac{\angle ب + \angle ح}{٢} = \frac{٦٧ + ٦٧}{٢} = ٦٧^\circ$$

$\therefore \overline{م} \overline{م}$ ينصف $\Delta ا ب ح$

$$\angle م = \frac{\angle ب + \angle ح}{٢} = \frac{٦٧ + ٦٧}{٢} = ٦٧^\circ$$

$\therefore \angle م = ٦٧^\circ$

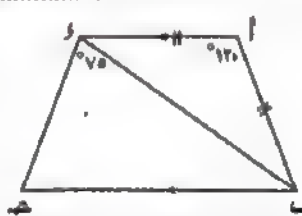
$م = م$

$$\angle م = (\angle ب + \angle ح) - \angle ا = (٦٧ + ٦٧) - ١٠٦ = ١٣٤^\circ$$

#

٤

في الشكل المقابل:



أ ب هـ Δ فيه $ا ب = ا ح$ ، $\angle ب = ٧٠^\circ$ ،
 $\overline{ا د} \parallel \overline{ب ح}$ ، $\angle ا = ١٢٠^\circ$
 أثبت أن : $ا ب = ب ح$

كلمة الحل



$$\angle ا = ١٢٠^\circ ، \angle ب = ٧٠^\circ ، \angle ح = ٣٠^\circ$$

$\Delta ا ب ح$ متساوي الساقين

$\therefore \angle ب = \angle ح$

$$\therefore \angle ب = \angle ح = ٧٠^\circ ، \angle ا = ١٢٠^\circ$$

\therefore مجموع قياسات زوايا $\Delta ا ب ح = ١٨٠^\circ$

$$\therefore \angle ب = \angle ح = (١٨٠^\circ - ١٢٠^\circ) / ٢ = ٣٠^\circ$$

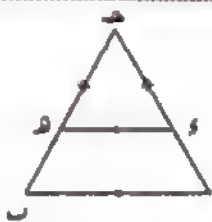
$$\therefore \angle ب = \angle ح = ٣٠^\circ$$

$\therefore \Delta ا ب ح$ متساوي الساقين

#

٢

في الشكل المقابل:



أ ب هـ Δ فيه $ا ب = ا ح$ ، $\angle ب = ٦٠^\circ$ ، $\angle ح = ٨٠^\circ$

بحيث $د هـ = د ح$ ، $\overline{د هـ} \parallel \overline{ا ب}$

أثبت أن : $ا هـ = ا ح$

كلمة الحل

المعطيات

المطلوب

البرهان

$د هـ = د ح$ ، $\overline{د هـ} \parallel \overline{ا ب}$

$ا هـ = ا ح$

$\therefore د هـ = د ح$

$$\therefore \angle د هـ = \angle ح د هـ = ٦٠^\circ$$

$\therefore \overline{د هـ} \parallel \overline{ا ب}$ ، $\overline{ا هـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ قاطعتين لهما

$$\therefore \angle د هـ = \angle ح د هـ = ٦٠^\circ$$

$$\therefore \angle د هـ = \angle ح د هـ = ٦٠^\circ$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : $\angle د هـ = \angle ح د هـ$

$$\therefore ا هـ = ا ح$$

#



الماه في الرياضيات

المعطيات: $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$ ، $\angle B = \angle C$ ، $\angle D = 70^\circ$

المطلوب: $B = C$

البرهان:

$$\angle A = 120^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ$$

$\angle D = 70^\circ$ ، $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$

بالتبادل: $\angle B = \angle C$

مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ هو 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$$

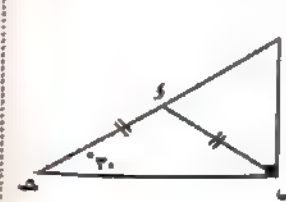
$$\angle B = \angle C = 30^\circ$$

$B = C$

#



في الشكل المقابل:



أب هـ مثلث قائم الزاوية في ب، $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle C = 60^\circ$
اثبت أن: ① $AB \parallel DE$ ومتساوي الأضلاع
② $AB = \frac{1}{2} AC$

الحل:

$$\angle A = 30^\circ$$

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle C = 60^\circ$$

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle C = 60^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ$$

المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

طريقة المثلث المتساوي

$\triangle ABC$ خارجة عن $\triangle DEF$

$$\angle A = 90^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\angle B = \angle C = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

$\triangle ABC$ متساوي الأضلاع

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B = \angle C$$

#



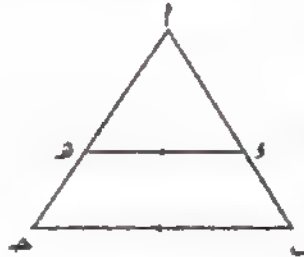
أمثلة لتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل:

$\triangle ABC$ فيه $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$

أكمل ما يأتي لإثبات أن $\triangle ABC$ متساوي الساقين



المعطيات:

المطلوب:

البرهان:

$$\angle A = 120^\circ$$

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B = \angle C$$

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle B = \angle C$$



تدريب (٢)

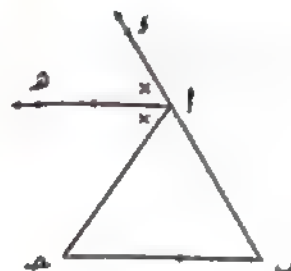
في الشكل المقابل،

أ ب هـ مثلث، و د ع ب أ

بحيث $\angle (د هـ ا) = 110^\circ$

أ د ينصف (د هـ ا)،

أ د // ب هـ



أكمل ما يأتي لإثبات أن $AB = AE$

المعطيات

المطلوب

البرهان

∴ $\angle (د هـ ا) = 110^\circ$ ، أ د ينصف د هـ ا

∴ $\angle (د هـ ا) = 110^\circ = \frac{110}{2} = 55^\circ$

∴ أ د // ب هـ، أ د قاطع لهما

∴ $\angle (د هـ ا) = \angle (د هـ ا) = 55^\circ$ (١)

∴ أ د // ب هـ، أ د قاطع لهما

∴ $\angle (د هـ ا) = \angle (د هـ ا) = 55^\circ$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

∴ $AB = AE$ (∴ $\angle (د هـ ا) = \angle (د هـ ا)$)

اطلب الماهر في الرياضيات

للمرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية
شرح ومراجعة وأهم الأسئلة المتوقعة للامتحان
امتحانات إضافية من السنوات السابقة



تمارين (٤)

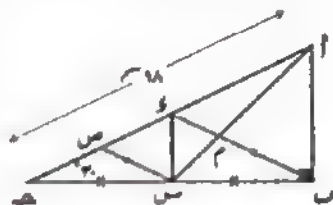
على عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي:

- ١) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي
- ٢) قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع تساوي
- ٣) إذا كان أ ب هـ مثلث قائم الزاوية في أ، $AB = AE$ فإن $\angle (د ب) = \dots$
- ٤) في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس زاوية الرأس 40° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة =

(ب) في الشكل المقابل،



إذا كان أ ب هـ Δ في

∴ $\angle (د ب) = 90^\circ$ ، ومنتصف أ هـ،

س منتصف ب هـ، $BS \parallel CS$ ،

∴ $\angle (د هـ ا) = 30^\circ$ ، $\angle (د هـ ا) = 38^\circ$ ،

أس = ١٢، $AS \cap BS = \{م\}$

فأكمل ما يأتي:

ب د = ∴ ب م = ∴

س م = ∴ س د = ∴

∴ $\angle (د س م) = 90^\circ$ ، محيط الشكل س م د = ∴

(هـ) في الشكل المقابل،

أ ب = ب د = د هـ = ا هـ،

∴ $\angle (د ب) = 70^\circ$

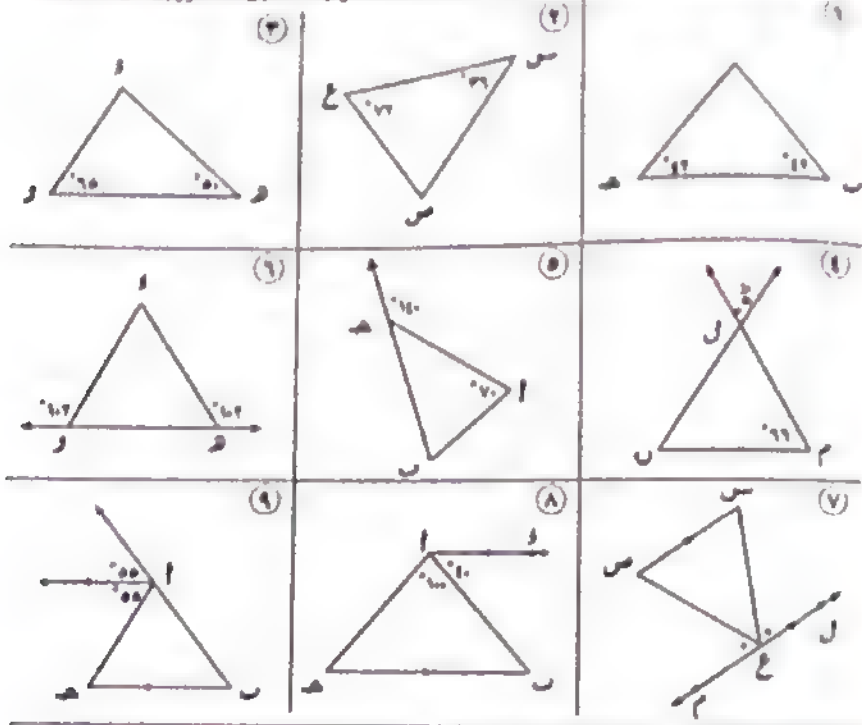
أوجد: ١) $\angle (د ب هـ)$

٢) $\angle (د ب ا)$





في مثل من الأشكال الآتية اعطهم صغر المثلث المتساوي الساقين المتساويين في الطول



في الشكل المقابل :



$$\angle A = 90^\circ$$

$$\angle B = 50^\circ$$

أثبت أن : $AB = AC$

في الشكل المقابل :



$$\angle A = 90^\circ$$

$$\angle B = 50^\circ$$

أثبت أن : $AB = AC$



في مثل من الأشكال الآتية اعطهم صغر المثلث المتساوي الساقين المتساويين في الطول



مسائل المستوى الأول

اعط ما يأتي :

- إذا تعطلت رابطة رأس مثلث فإنه يكون
 إذا كان قياس زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين تساوي 90° فإن المثلث
 في ΔABC إذا كان $\angle A = 120^\circ$ ، $\angle B = 30^\circ$ فإن $AB = \dots\dots\dots$
 إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة في Δ متساوي الساقين 52° فإن قياس زاوية رأسه $= \dots\dots\dots$
 إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوي الساقين 70° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة $= \dots\dots\dots$
 إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$ ، $\angle B = 30^\circ$ فإن المثلث
 إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = 120^\circ$ فإن قياس محيطه $= 12$ فإن $AB = \dots\dots\dots$

أعتر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين 30° فإن المثلث
 [منفرج الزاوية ، حاد الزوايا ، قائم الزاوية ، متساوي الأضلاع]
 إذا كان قياس زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين 100° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة يساوي
 [100° ، 50° ، 40° ، 150°]
 إذا كان قياس زاويتي رأسين من مثلث 70° ، 40° فإن المثلث
 [متساوي الأضلاع ، متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، قائم ومتساوي الساقين]
 إذا كان قياس إحدى زوايا Δ قائم الزاوية 45° فإن المثلث
 [متساوي الأضلاع ، متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متطابق الزوايا]
 إذا كان المثلث ABC فيه $AB = AC$ ، $\angle B = 30^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$ فإن $AB = \dots\dots\dots$
 [30° ، 60° ، 90° ، 120°]

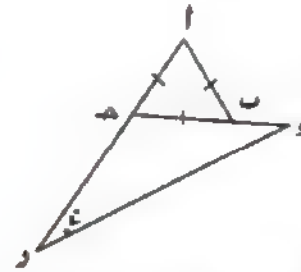


مسائل المستوى الثاني



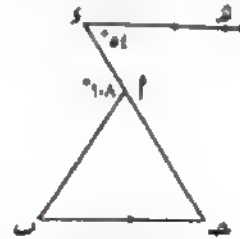
٧ في الشكل المقابل :

أ ب ه مثلث متساوي الأضلاع
 $\angle \text{أ} = 60^\circ$ ، $\angle \text{ب} = 60^\circ$ ، $\angle \text{ه} = 60^\circ$
 أثبت أن : $\Delta \text{ ه د ر}$ متساوي الساقين



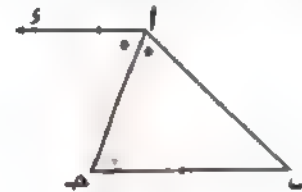
٨ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{ه د}} \parallel \overline{\text{ب ه}}$ ، $\angle \text{ه د ب} = 40^\circ$ ،
 $\angle \text{ب د ه} = 80^\circ$ ،
 أثبت أن : $\Delta \text{ أ ب ه}$ متساوي الساقين



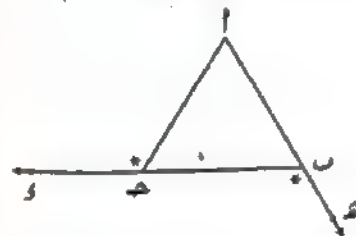
٩ في الشكل المقابل :

$\angle \text{أ ب ه} = 60^\circ$ ، $\angle \text{ب د ه} = 60^\circ$ ،
 $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب ه}}$
 أثبت أن : $\text{أ ب} = \text{ب ه}$



١٠ في الشكل المقابل :

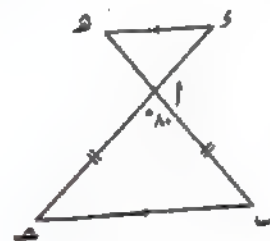
$\angle \text{أ ب ه} = 60^\circ$ ، $\angle \text{ب د ه} = 60^\circ$ ،
 $\angle \text{ه د ب} = 60^\circ$ ،
 أثبت أن : $\text{أ ب} = \text{ب ه}$
 وإذا كان $\angle \text{ب د ه} = 60^\circ$ ،
 فأثبت أن : $\Delta \text{ أ ب ه}$ متساوي الأضلاع



١١ في الشكل المقابل :

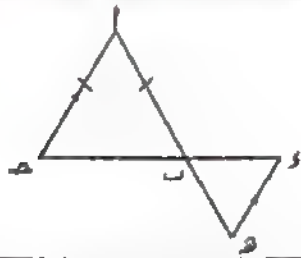
$\overline{\text{ه د}} \cap \overline{\text{أ ب}} = \{ \text{أ} \}$ ، $\angle \text{أ ب ه} = 60^\circ$ ،
 $\overline{\text{ه د}} \parallel \overline{\text{ب ه}}$ ، $\angle \text{ب د ه} = 80^\circ$ ،
 أوجد $\angle \text{د ب ه}$

ثم برهن أن : $\Delta \text{ أ ه د}$ متساوي الساقين



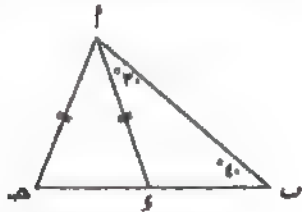
١٢ في الشكل المقابل :

$\text{أ ب} = \text{أ ه}$ ،
 $\overline{\text{ه د}} \cap \overline{\text{أ ب}} = \{ \text{ب} \}$ ،
 $\overline{\text{ه د}} \parallel \overline{\text{أ ه}}$
 أثبت أن : $\text{ه د} = \text{ه ب}$



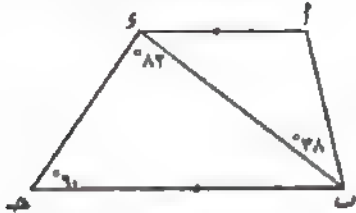
١٣ في الشكل المقابل :

$\angle \text{أ ب ه} = 40^\circ$ ، $\angle \text{ب د ه} = 40^\circ$ ،
 $\angle \text{ه د ب} = 80^\circ$ ،
 أثبت أن : $\text{أ ب} = \text{ب ه}$



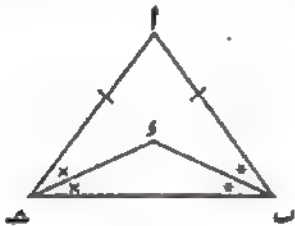
١٤ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب ه}}$ ، $\angle \text{أ ب ه} = 82^\circ$ ،
 $\angle \text{ب د ه} = 60^\circ$ ، $\angle \text{ه د ب} = 38^\circ$ ،
 أثبت أن : $\text{أ ب} = \text{أ ه}$



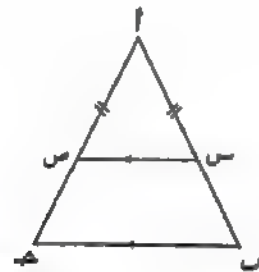
١٥ في الشكل المقابل :

$\text{أ ب} = \text{أ ه}$ ،
 $\overline{\text{ب د}} \cap \overline{\text{أ ب ه}} = \{ \text{د} \}$ ،
 $\overline{\text{ه د}} \cap \overline{\text{أ ب ه}} = \{ \text{د} \}$ ،
 أثبت أن : $\Delta \text{ ب ه د}$ متساوي الساقين



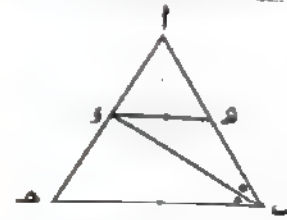
١٦ في الشكل المقابل :

$\text{أ س} = \text{أ ه}$ ،
 $\overline{\text{ب س}} \cap \overline{\text{أ س ه}} = \{ \text{س} \}$ ،
 $\overline{\text{ب ه}} \parallel \overline{\text{س ه}}$ ،
 أثبت أن : $\text{أ ب} = \text{أ ه}$



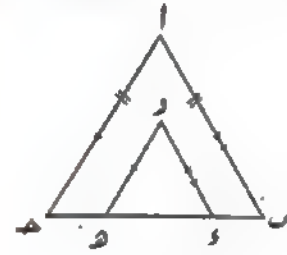


١٧ في الشكل المقابل :



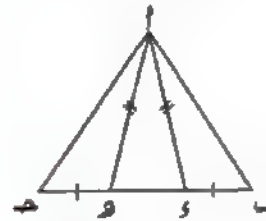
\overline{DE} ينصف ΔABC ، ويقطع \overline{AD} في D
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ حيث $D \in \overline{AB}$
 أثبت أن : ΔABC متساوي الساقين

١٨ في الشكل المقابل :



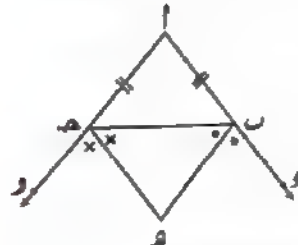
ΔABC مثلث فيه $AB = AC$ ،
 $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ نقطة داخل المثلث
 بحيث $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
 أثبت أن : $DE = DE$

١٩ في الشكل المقابل :



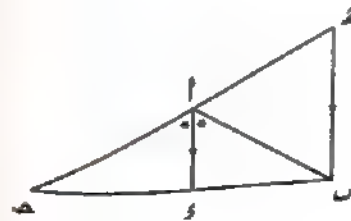
ΔABC فيه $AB = AC$ ، $D \in \overline{AB}$ ،
 $E \in \overline{AC}$ ، $D = E$
 أثبت أن : $AB = AC$

٢٠ في الشكل المقابل :



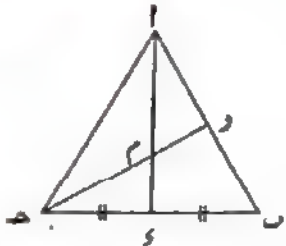
$AB = AC$ ، $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ،
 \overline{DE} ينصف ΔABC ،
 \overline{DE} ينصف ΔABC
 أثبت أن : $AB = AC$

٢١ في الشكل المقابل :



$D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ينصف ΔABC ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 أثبت أن ΔABC متساوي الساقين
 وإذا كان $\angle A = 60^\circ$
 أثبت أن ΔABC متساوي الأضلاع

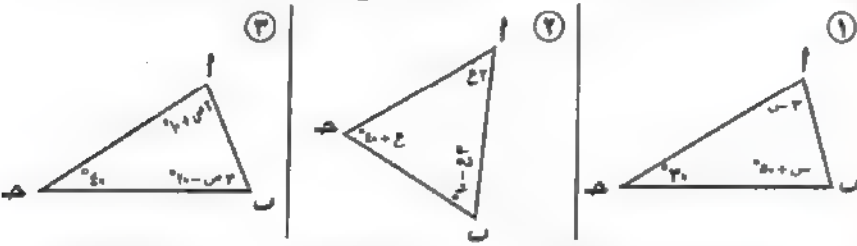
٢٢ في الشكل المقابل :



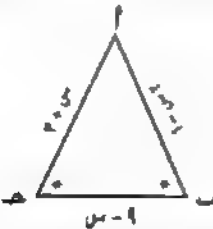
ΔABC مثلث فيه $AB = AC$ ،
 $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ،
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 أثبت أن $DE = DE$

٢٣ ΔABC وشكل رباعي فيه $\angle A = 90^\circ$ ، $AB = AC$ ، $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ،
 أثبت أن : $AB = AC$

٢٤ في كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول :



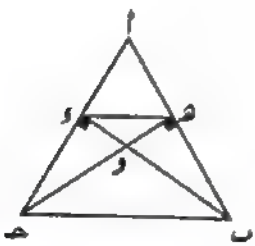
٢٥ في الشكل المقابل :



ΔABC مثلث فيه
 $AB = AC$ ، $D \in \overline{AB}$ ،
 $E \in \overline{AC}$ ، $D = E$
 أوجد محيط المثلث

مسائل المتفوقين

٢٦ في الشكل المقابل :



ΔABC فيه $AB = AC$ ،
 $D \in \overline{AB}$ ، $E \in \overline{AC}$ ،
 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 أثبت أن : $AB = AC$

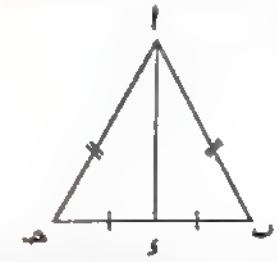


نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين

• للمثلث المتساوي الساقين عدة نتائج هامة تتلخص فيما يلي :

نتيجة

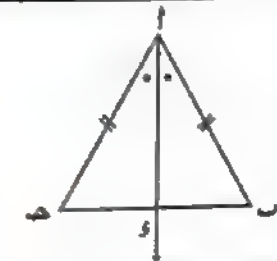
متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة



فمثلاً : إذا كان $AB = AC$ مثلث فيه
 $AD = AD$ ، AD متوسط فإن :
 ① AD ينصف زاوية الرأس $\angle BAC$
 ② $AD \perp BC$

نتيجة

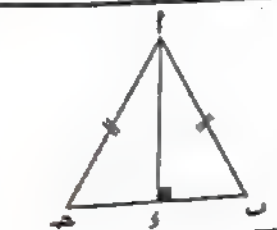
منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها



فمثلاً : إذا كان $AB = AC$ مثلث فيه $AD = AD$ ،
 AD ينصف $\angle BAC$ فإن :
 ① D منتصف BC أي $BD = DC$
 ② $AD \perp BC$

نتيجة

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف ضلعا من القاعدة وزاوية الرأس



فمثلاً : إذا كان $AB = AC$ مثلث فيه $AD = AD$ ،
 $AD \perp BC$ فإن :
 ① D منتصف BC أي $BD = DC$
 ② $\angle BAD = \angle CAD$ و $\angle ABD = \angle ACD$



ومما سبق يمكن إدراك أن المثلث المتساوي الساقين به ثلاث معلومات هامة إذا أعطيت إحداها نستنتج الآخرين كما يلي :



- متوسط من رأس Δ ← نستنتج أنه
- عمودي على القاعدة
- ينصف القاعدة
- منصف زاوية الرأس ← نستنتج أنه
- عمودي على القاعدة
- ينصف القاعدة
- مستقيم من رأس Δ عمودي على القاعدة ← نستنتج أنه
- ينصف زاوية الرأس

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته

نفع الشكل المقابل :



إذا كان $AB = AC$ مثلث فيه $AD = AD$ ،
 $AD \perp BC$ فإن AD يسمى
 محور تماثل المثلث ABC
 لاحظ أن محور تماثل المثلث المتساوي الساقين :
 ① ينصف القاعدة
 ② ينصف زاوية الرأس
 ③ عمودي على القاعدة

ملاحظة



- المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل حيث يمر محور التماثل بأحد رؤوس المثلث عمودياً على القاعدة المقابلة لهذه الرأس من منتصفها كما بالشكل
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل



محور تماثل القطعة المستقيمة

يسمى المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة وللاختصار يسمى محور القطعة المستقيمة

في الشكل المقابل :



إذا كانت h منتصف \overline{AB} المستقيم $l \perp \overline{AB}$ ماراً بنقطة h فإن المستقيم l هو محور \overline{AB}

خاصية هامة

أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

لنثبت : إذا كان المستقيم l محور \overline{AB}

وكانت $h \in l$ فإن $ah = bh$

وإذا كانت $h \notin l$ فإن $ah \neq bh$

والعكس صحيح أي أنه :

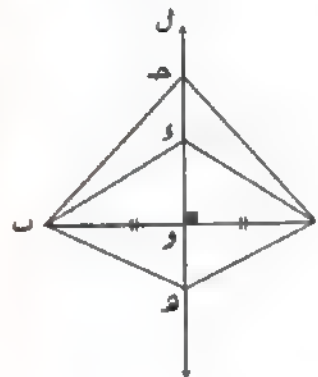
إذا كانت \overline{AB} قطعة مستقيمة و h نقطة

بحيث $ah = bh$ فإن h تقع على محور \overline{AB}

أي أنه إذا كانت نقطة على بعدين متساويين

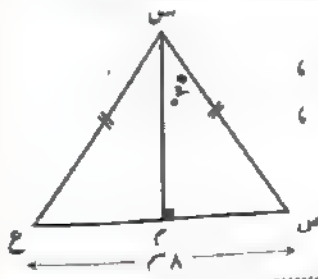
من طرفي قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة

تقع على محور هذه القطعة المستقيمة



أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل :



س $\triangle ABC$ فيه $س = ص$ ،

$س \perp ص$ ، $ق (ص س) = ٣٥^\circ$ ،

$ص = ٨$ ،

أوجد : ① $ق (ص س)$ ،

② طول $س$

الحل

المعطيات

س $= ص$ ، $س \perp ص$ ، $ق (ص س) = ٣٥^\circ$ ،

$ص = ٨$ ،

المطلوب

ق (ص س) ، طول $س$

البرهان

في $\triangle س ص ع$

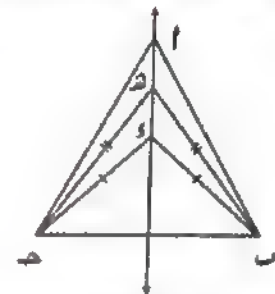
$\therefore س = ص$ ، $س \perp ص$ ،

$\therefore س$ ينصف القاعدة $ص ع$ وينصف زاوية الرأس $ص س ع$

$\therefore ق (ص س ع) = ق (ص س ص) = ٣٥^\circ$ ،

$\therefore ص = ع = ٨$ ، $س = ٤$ ،

في الشكل المقابل :



$ا \exists ق د$ ،

$د = و$ ،

$و = د$ ،

اثبت أن : $ا = ب$ ،

الحل

المعطيات

$د = و$ ، $و = د$ ،

المطلوب

$ا = ب$ ،

البرهان

$د = و$ ،

$\therefore د \exists$ محور $ب ه$ ،

$\therefore د \exists$ محور $ب ه$ ،

$\therefore د \exists$ محور $ب ه$ ،

$\therefore ا = ب$ ،

في الشكل المقابل:



أ ب هـ وشكل رباعي فيه
 $\{ د \} = \overline{AB} \cap \overline{AC}$
 بحيث $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $\angle ADE = 30^\circ$
 $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 60^\circ$
 أوجد: ① $\angle CBE$ ، ② طول كل من \overline{AD} ، \overline{BD}

الحل

أ ب هـ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 60^\circ$ ، $\angle CBE = 60^\circ$

① $\angle CBE = 60^\circ$ ، طول كل من \overline{AD} ، \overline{BD}

المعطيات
 المطلوب
 البرهان

في $\triangle ADE$:

$\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$

$\therefore \angle DAE = 60^\circ$ ، $\angle ADE = 30^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$

$\therefore \angle CBE = 60^\circ$ ، $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle BED = 90^\circ$

في $\triangle ABE$:

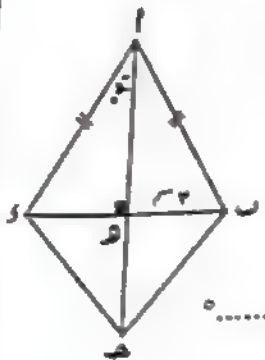
$\angle ABE = 60^\circ$ ، $\angle AED = 90^\circ$ ، $\angle BAE = 30^\circ$

$\therefore \angle CBE = 60^\circ$ ، $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle BED = 90^\circ$

مثال للتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل:



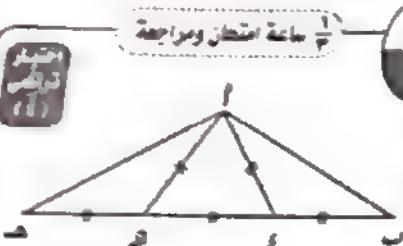
أ ب هـ وشكل رباعي فيه
 $\{ د \} = \overline{AB} \cap \overline{AC}$
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $\angle ADE = 30^\circ$
 $\angle BDE = 30^\circ$ ، $\angle ABE = 60^\circ$
 أكمل ما يأتي:

- ① $\angle CBE = 60^\circ$ ، ② $\angle ADE = 30^\circ$
 ③ $\angle BDE = 30^\circ$ ، ④ $\angle ABE = 60^\circ$
 ⑤ $\angle CBE = 60^\circ$ ، ⑥ $\angle ADE = 30^\circ$

تمارين (٥)

على نتائج على نظرية المثلث المتساوي الساقين

أولاً: راجع معاً واختر نقت



١) في الشكل المقابل:

إذا كان $AB = AC$ ، $\angle A = 100^\circ$ ، $\angle B = 40^\circ$ ، $\angle C = 40^\circ$

بحيث $AD = DE = EC$ ، $\angle BDE = 40^\circ$ ، $\angle CED = 40^\circ$

أكمل ما يأتي:

- ① $\angle ADE = 40^\circ$ ، ② $\angle BDE = 40^\circ$ ، ③ $\angle CED = 40^\circ$ ، ④ $\angle AEC = 100^\circ$

(ب) في كل مما يأتي أوجد قيمة \angle :

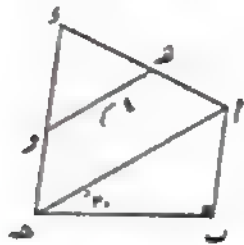


..... = \angle

..... = \angle

..... = \angle

(ج) في الشكل المقابل:



أ ب هـ وشكل رباعي فيه $\angle A = 90^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$ ، $\angle D = 90^\circ$
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $\angle ADE = 45^\circ$ ، $\angle BDE = 45^\circ$ ، $\angle ABE = 45^\circ$ ، $\angle CBE = 45^\circ$
 أوجد طول \overline{AB}



للمثلث = [صقر ١ ٢ ٣]

③ محسور تماثل ΔABC ہو

④ عدد محاور تماثل Δ ب ه ه و و عدد محاور تماثل Δ ا ب ه و



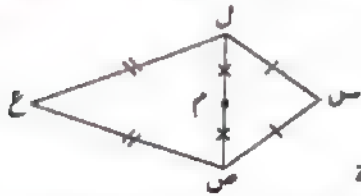
مراحل المستوى الأول

..... = (ب) فان

عمود (أ) متصف (أ) متوسط (أ) محصور (أ)



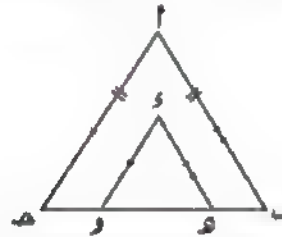
١) في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \text{س} \text{ م} &= \text{س} \text{ ل} \\ \text{ع} \text{ م} &= \text{ع} \text{ ل} \\ \text{ل} \text{ م} &= \text{ل} \text{ س} \end{aligned}$$

اثبت أن : س، م، ع على استقامة واحدة

٢) في الشكل المقابل :

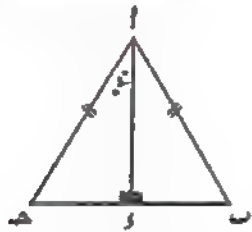


$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{أ هـ} , \text{و د} \parallel \text{أ ب} \\ \text{و د} &\parallel \text{أ هـ} \end{aligned}$$

اثبت أن : ١) و هـ = و د

٢) ق (د ب أ هـ) = ق (د و د)

٣) في الشكل المقابل :

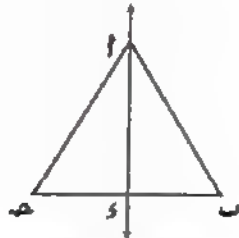


$$\begin{aligned} \text{أ ب هـ} \Delta \text{ فيه } \text{أ ب} &= \text{أ هـ} , \text{ب هـ} = \text{ب هـ} \\ \text{أ و} \perp \text{ب هـ} , \text{ق (د ب أ هـ)} &= 30^\circ \end{aligned}$$

١) أوجد طول ب و

٢) اثبت أن Δ أ ب هـ متساوي الأضلاع

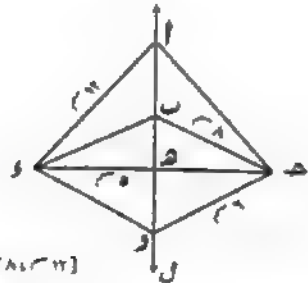
٣) في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \vec{\text{أ و}} &\text{ محاور تماثل } \text{ب هـ} , \\ \text{أ ب} &= \text{أ هـ} = \text{ب هـ} \end{aligned}$$

احسب : قياسات زوايا Δ أ ب و

٤) في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \text{ل محاور تماثل } \text{هـ و} \\ \text{هـ و} &= \text{هـ هـ} , \text{ب هـ} = \text{ب هـ} \\ \text{أ و} &= \text{أ و} , \text{هـ و} = \text{هـ و} \\ \text{أوجد طول كل من :} \\ \text{أ هـ} , \text{ب و} , \text{هـ و} , \text{و د} \end{aligned}$$



مسائل المستوى الثاني

٦) في الشكل المقابل :

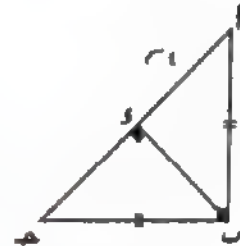


$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{أ هـ} , \text{ب هـ} = \text{ب هـ} \\ \text{ق (د ب أ هـ)} &= 30^\circ , \text{أ و} \perp \text{ب هـ} \end{aligned}$$

١) احسب طول ب و ، أ ب ، ق (د ب هـ)

٢) ما عدد محاور تماثل Δ أ ب هـ ؟

٧) في الشكل المقابل :

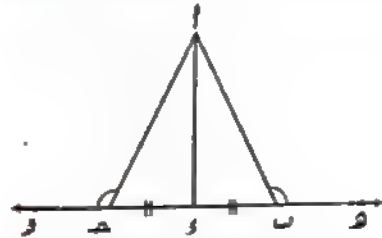


$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \text{ب هـ} , \text{أ ب} \perp \text{ب هـ} \\ \text{ب و} \perp \text{أ هـ} , \text{أ و} &= \text{أ هـ} \end{aligned}$$

احسب : طول أ هـ ، ق (د و هـ)

برهن أن : Δ و ب هـ متساوي الساقين

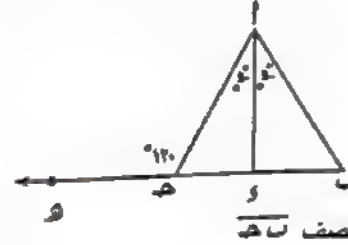
٨) في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \text{و ب} &= \text{و د} , \\ \text{ق (د ب أ هـ)} &= \text{ق (د أ هـ و)} \end{aligned}$$

اثبت أن : $\vec{\text{أ و}} \perp \text{ب هـ}$

٩) في الشكل المقابل :



$$\begin{aligned} \text{أ ب هـ مثلث} , \\ \text{ق (د ب أ هـ)} &= \text{ق (د أ هـ و)} = 30^\circ \end{aligned}$$

د \exists ب هـ بحيث ق (د أ هـ و) = ١٢٠°

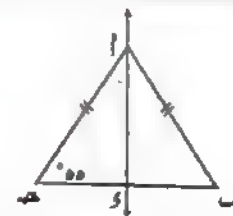
اثبت أن : ١) $\vec{\text{أ و}} \perp \text{ب هـ}$

٢) و منتصف ب هـ

٣) ما هو عدد محاور تماثل المثلث أ ب هـ ؟



١٥ في الشكل المقابل :



[٢٥]

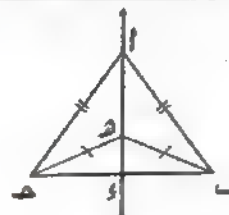
$AB = AC$ ،
أو محور تماثل ΔABC ،
و $(\angle D) = 90^\circ$
أوجد : $\angle (DAB)$

١٦ في الشكل المقابل :



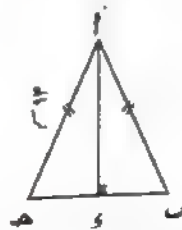
$AB = AC$ مثلث فيه ،
و $(\angle DAB) = (\angle DAC)$
أثبت أن : \overline{AD} محور تماثل

١٧ في الشكل المقابل :



$AB = AC$ ،
 $AD = DC$ ،
أثبت أن : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

١٨ في الشكل المقابل :



[٢٦، ٢٧]

$AB = AC$ في ΔABC ،
أو $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $AD = DC$ ،
① أوجد طول \overline{AD} ،
② أوجد مساحة ΔABC

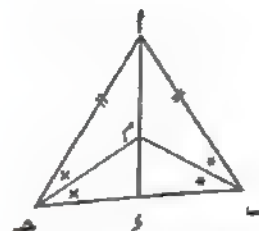
١٩ $AB = AC$ Δ متطابق الساقين ، رسم محور التماثل المستقيم ل يمر بالرأس أ

فإذا كان $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ، $D \in \overline{AD}$ بحيث $AD = DB$
أثبت أن : ΔABC متطابقان ثم أثبت أن : $AD = DC$



مسائل التفوق

٢٠ في الشكل المقابل :



$AB = AC$ ، \overline{AD} ينصف \overline{BC} ،
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،
أثبت أن : $\overline{AD} \perp \overline{BC}$



اختبارات (٣)

اختبارات مراجعة على ما سبق

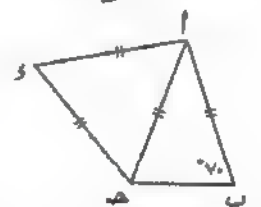
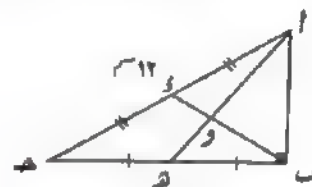
نموذج (١)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

١ أكمل ما يأتي :

- ① نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة من جهة القاعدة
- ② متوسط المثلث هو
- ③ في الشكل المقابل :
 $AD = DC$

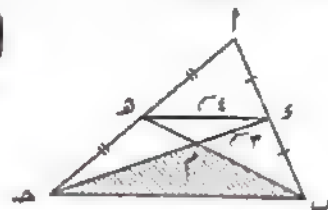


④ في الشكل المقابل :

$(\angle DAB) = (\angle DAC)$

٢ في الشكل المقابل :

$AD = DC$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،
 $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ، $AD = DB$ ،
 $AD = DC$ ، $AD = DC$ ،
أوجد بالبرهان محيط ΔABC



- ③ $AB = AC$ مثلث متساوي الساقين فيه $AD = DC$ ،
 $AD = DC$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $(\angle DAB) = (\angle DAC) = 90^\circ$
أوجد $(\angle DAB)$ ، طول \overline{AD}

نموذج (٢)

اختبار مراجعة على ما سبق

١ أكمل ما يأتي:

- ١ طول متوسط Δ القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي الوتر
[طول Δ نصف طول Δ ضعف طول Δ ثلث طول]
- ٢ قياس الزاوية الخارجة من المثلث المتساوي الأضلاع =
[30° 90° 120° 150°]

٣ في الشكل المقابل:

$\angle 1 = 50^\circ$ ،

[40° 80° 50°]

٤ في الشكل المقابل:

أ ب ح د مستطيل، ح منتصف أ د
إذا كان $\angle 1 = 40^\circ$ فإن $\angle 2 =$
[20° 40° 80° 120°]

٥ في الشكل المقابل:

أ ب ح د مثلث فيه أ ب = أ ح، أ د \perp ب ح
 $\angle 1 = 30^\circ$ ، $\angle 2 =$
 $\angle 3 = 80^\circ$ ، $\angle 4 =$
أكمل ما يأتي:

- ١ $\angle 1 = 30^\circ$ ، $\angle 2 =$
٢ $\angle 3 = 80^\circ$ ، $\angle 4 =$
٣ $\angle 1 = 30^\circ$ ، $\angle 2 =$
٤ $\angle 3 = 80^\circ$ ، $\angle 4 =$

٦ في الشكل المقابل:

$\angle 1 = 40^\circ$ ،

$\angle 2 = 30^\circ$ ،

أ ب = أ ح

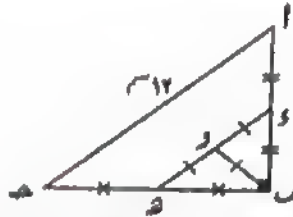
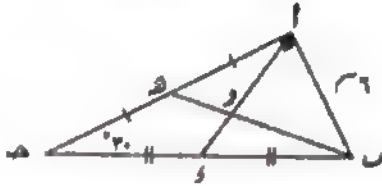
أوجد بالبرهان: $\angle 3 =$ (.....)

نموذج (٣)

اختبار مراجعة على ما سبق

١ أكمل ما يأتي:

- ١ أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون
٢ إذا كان قياس زاويتين في مثلث 70° ، 40° فإن عند محاور التماثل لهذا المثلث =
٣ في الشكل المقابل:
 $\angle 1 =$
٤ في الشكل المقابل:
 $\angle 1 =$

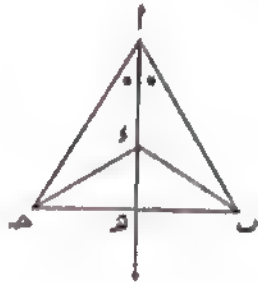


٥ في الشكل المقابل:

$\angle 1 = 30^\circ$ ، $\angle 2 = 40^\circ$ ،
أ ب ح د ينصف د ه ا
اثبت أن: أ ب = أ ح

٦ في الشكل المقابل:

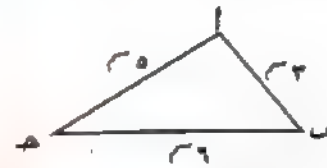
أ ب ح د مثلث فيه أ ب = أ ح،
أ د ينصف د ب أ ح،
أ د \cap ب ح = { د } ، $\angle 1 = 30^\circ$ ،
اثبت أن: ١) $\angle 1 = 30^\circ$ ، ٢) $\angle 2 = 40^\circ$



التباين

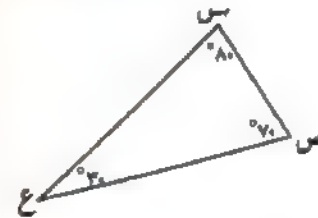
الوحدة الخامسة

تسمى كل من $<$ ، $>$ علامة التباين وتسمى " $أ < ب$ " و " $أ > ب$ " متباينة أو علاقة تباين وهي تستخدم للمقارنة بين الأطوال والقياسات المختلفة
فمثلاً في $\triangle أ ب ح$:



إذا كان $أ ب = ٣$ ، $ب ح = ٦$ ، $أ ح = ٥$
فإننا نستنتج أن طول $ب ح$ أكبر من طول $أ ح$
ونكتب $ب ح > أ ح$ وأيضا نستنتج أن $أ ب < أ ح$
أي أن $ب ح > أ ح < أ ب$

وأيضا في $\triangle س ع د$:



إذا كان $د (س) = ٧٠^\circ$ ، $ع (د) = ٣٠^\circ$
فإننا نستنتج أن $د (س) < ع (د)$ ،
 $د (س) < ع (د)$ وأن $د (س) < ع (د)$
أي أن $د (س) < ع (د) < س (د)$

وعلاقة التباين مسلمات تسمى مسلمات التباين سوف نعرضها فيما يلي :

مسلمات علاقة التباين

بفرض أن $س$ ، $ع$ ، $أ$ ، $ب$ أعداد :

- إذا كان $س < ع$ فإن $س + ع < ع + ع$
- إذا كان $س < ع$ فإن $س - ع < ع - ع$
- إذا كان $س < ع$ وكان $ع$ عدداً موجباً فإن $س ع < ع ع$
- إذا كان $س < ع$ ، $ع < ب$ فإن $س < ب$
- إذا كان $س < ع$ ، $أ < ب$ فإن $س + أ < ع + ب$

ويمكننا التأكد من المسلمات السابقة بوضع أعداد بدلاً من الرموز
فمثلاً بفرض أن $س = ١٠$ ، $ع = ٦$ ، $أ = ٢$ يمكن التأكد من صحة المسلمات

تذكر أن

قياس أي زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلية ما عدا المجاورة لها

أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل :

$أ ب = ٥$ ، $أ ح = ٣$
بحيث $أ ح < ب ح$
أثبت أن : $أ ب < ب ح$



الحل

المعطيات : $أ ح < ب ح$

المطلوب : $أ ب < ب ح$

البرهان : $أ ب < ب ح$ ، $ب ح < ب ح$ مشتركة في كل منهما

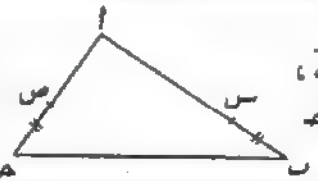
ب طرح طول $ب ح$ من كل منهما

$\therefore أ ب - ب ح < ب ح - ب ح$

$\therefore أ ب < ب ح$

في الشكل المقابل :

$أ ب ح$ فيه $أ ب < أ ح$ ، أثبت $س د < أ ب$ ،
 $س د = ب ح$ ،
أثبت أن : $أ ب < أ ح$



الحل

المعطيات : $أ ب < أ ح$ ، $س د = ب ح$

المطلوب : $أ ب < أ ح$

البرهان : $أ ب < أ ح$

- (١) $أ ب < أ ح$
- (٢) $س د = ب ح$

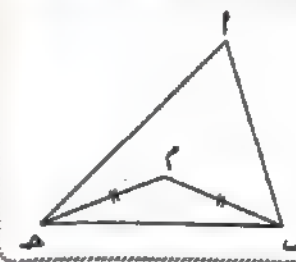
ب طرح (٢) من (١)

$\therefore أ ب - س د < أ ح - ب ح$

$\therefore أ ب < أ ح$



مثال ٢ في الشكل المقابل



أ ب ح فيه ،
 $\angle DAB < \angle DAC$ ،
 $AD = AE$
 أثبت أن : $\angle DAB < \angle DAC$ (أ ب ح)

بكم الحل

المعطيات : $\angle DAB < \angle DAC$ ، $AD = AE$

المطلوب : $\angle DAB < \angle DAC$ (أ ب ح)

البرهان

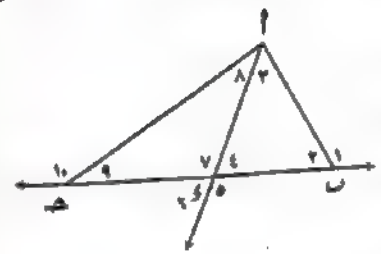
١. $\angle DAB = \angle DAC$ (أ ب ح)
 ٢. $\angle DAB < \angle DAC$ (أ ب ح)
 من (١)، (٢) بالطرح :

$\angle DAB - \angle DAB < \angle DAC - \angle DAC$ (أ ب ح)
 $\angle DAB < \angle DAC$ (أ ب ح)
 #



تدريب (١)

في الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث ، $AD = AE$ ، $\angle DAB = \angle DAC$
 ضم دائرة حول الزاوية
 التي لها أكبر قياس
 في كل مما يأتي :

- ① ٤٥ ، ٣٥ ، ١٥
- ② ٩٥ ، ٨٥ ، ٤٥
- ③ ٧٥ ، ٣٥ ، ٢٥
- ④ ١٥ ، ٨٥ ، ٧٥



تمارين (٦)

على مسلمات التباين

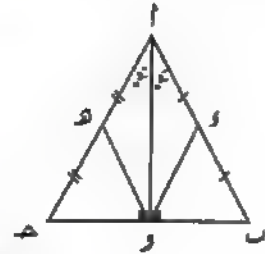


أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١ (أ) اكمل ما يأتي :

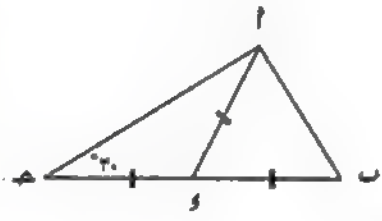
- ① نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة
- ② عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع يساوي
- ③ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوي الساقين يساوي ٦٠° كان المثلث
- ④ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه =°

(ب) في الشكل المقابل :



أ ب ح فيه ، ه منتصفى
 أ ب ، أ ح على الترتيب ،
 أ ب ⊥ أ ح ، د ه = د ه = د ه فإن :
 أ ب = ، أ ح =
 ب د = ، د ه =
 محيط Δ أ ب ح =

(ج) في الشكل المقابل :



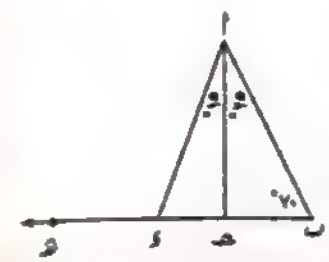
د ه = د ه بحيث
 د ه = د ه = د ه
 $\angle DAB = \angle DAC$
 أثبت أن ① أ ب ح متساوي الأضلاع
 ② أ ب ح قائم الزاوية



ثانياً: اجب عما يأتي:

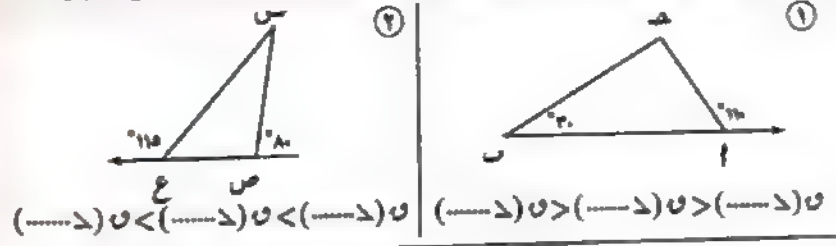
مسائل المستوى الأول

٢) فو الشكل المقابل:



- أوجد \angle (د ا ب)، \angle (د ا ح)، \angle (د ب ح)
ثم أكمل باستخدام $<$ أو $>$:
١) \angle (د ا ح) \angle (د ا ب)
٢) \angle (د ا ح) \angle (د ب ح)
٣) \angle (د ا ح) \angle (د ب ح)
٤) \angle (د ا ح) \angle (د ب ح)

٣) وتم زوايا المثلث ا ب ح تصاعدياً وقياسات زوايا Δ س م ع تنازلياً:



٤) (١) ا ب ح، د ه و أربع نقط على استقامة واحدة على الترتيب

فأكمل بوضع علامة $<$ أو $>$ أو $=$ في كل مما يأتي:

- ١) إذا كان ا ب ح، د ه و
فإن ا ه
٢) إذا كان ا ب ح، د ه و
فإن ا ب - ب ح د ه - د ه
(ب) أكمل ما يأتي:

- ١) إذا كان س م = ل م فإن $\frac{1}{4}$ س م $\frac{1}{4}$ ل م
٢) إذا كان \angle (د ا ح) = 60° ، \angle (د ب ح) = 40° ، \angle (د ا ب) = 90°
فإن \angle (د ا ح) + \angle (د ب ح) \angle (د ا ب)
٣) إذا كان \angle (د ا ح) < \angle (د ب ح) فإن مكملة د ا مكملة د ب



٥) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:

- ١) إذا كان ا ب ح، د ه و أعداد موجبة وكان ا < ب فإن ا + د ب + ه
[< ، > ، = ، //]
٢) إذا كان ا ب ح، د ه و عددين موجبين، د عند سائب وكان ا < ب فإن ا + د ب + ه
[< ، > ، = ، //]
٣) إذا كان س م، ل م عددين موجبين حيث س < م وكان ع عند سائب فإن
س م م ل [< ، > ، = ، //]
٤) إذا كان ا ب ح، د ه و ثلاث أعداد موجبة وكان ا < ب، ب < د فإن ا ه
[< ، > ، = ، //]
٥) إذا كان م، ل، ن س م بحيث م < س ل فإن س م ل م
[< ، > ، = ، //]
٦) إذا كان ب و ي نصف د ا ب فإن \angle (د ا ب) \angle (د ب ح)
[< ، > ، = ، //]

مسائل المستوى الثاني

٦) فو الشكل المقابل:



ا ب = د ه = ٢ ،
ب ح = د ه = ٣ ،
أثبت أن: ا ه < د و

٧) فو الشكل المقابل:



ا ب = د ه، ب ح < د ه
أثبت أن: ا ه < د و

٨) فو الشكل المقابل:



ا ب = د ه = ٤ ، د ه = ٣ ، ب ح = ٥
أثبت أن: ا ه < ب و

٩) فو الشكل المقابل:

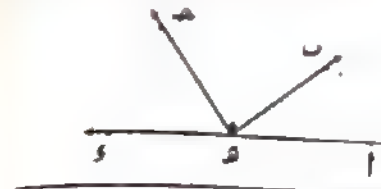


ا ب < د ه
أثبت أن: ا ه < ب و



١٥) فو الشكل المقابل :

$\angle (د ه و) = 150^\circ$
 $\angle (د ا ه) = 120^\circ$
 $\angle (د ب ه) = 90^\circ$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) > \angle (د ه و)$

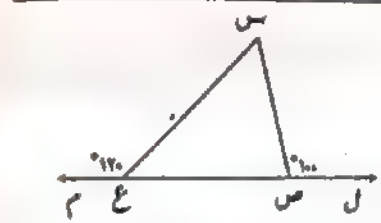
١٦) فو الشكل المقابل :

$\angle (د ب و) < \angle (د ا ه)$
 اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ب و)$



١٧) فو الشكل المقابل :

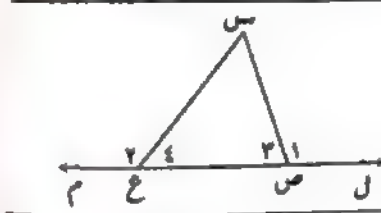
$\angle (د ب ع م) = 120^\circ$
 $\angle (د ا ب م) = 90^\circ$



اثبت أن : $\angle (د ب ع م) > \angle (د ب ا م)$

١٨) فو الشكل المقابل :

$\angle (د ا ب) > \angle (د ب ا)$
 اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ب ا)$



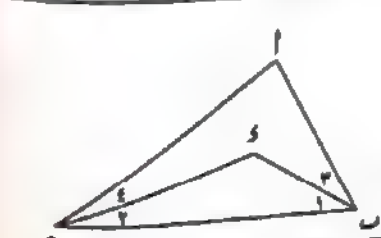
١٩) فو الشكل المقابل :

$\angle (د ب ه) = 30^\circ$, $\angle (د و ه) = 40^\circ$
 $\angle (د ا ب) = 40^\circ$, $\angle (د ا ه) = 30^\circ$
 اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ا ه)$



٢٠) فو الشكل المقابل :

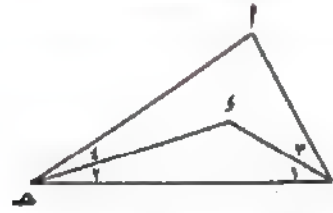
$\angle (د ا ب) < \angle (د ب ا)$
 $\angle (د ا ب) < \angle (د ب ا)$



اثبت أن : $\angle (د ا ب) < \angle (د ا ه)$

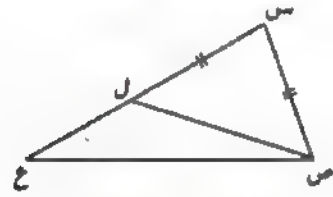
١٦) فو الشكل المقابل :

$\angle (د ا ب) = \angle (د ب ا)$
 $\angle (د ا ب) = \angle (د ب ا)$
 $\angle (د ا ب) < \angle (د ب ا)$



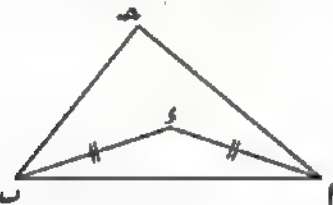
١٧) فو الشكل المقابل :

$س س = س ل$
 اثبت أن :
 $\angle (د ب س ع) < \angle (د ا س ع)$



١٨) فو الشكل المقابل :

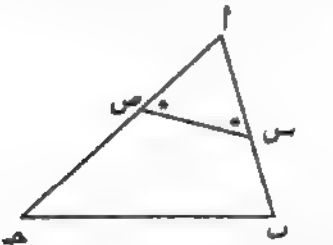
$\angle (د ب ا) < \angle (د ا ب)$
 $و ا = و ب$



اثبت أن : $\angle (د ب و) < \angle (د ا و)$

١٩) فو الشكل المقابل :

ا ب ه مثلث فيه ا ه < ا ب ،
 س \in ا ب ، س \in ا ه بحيث
 $\angle (د ا س س) = \angle (د ا س س)$
 اثبت أن : س ه < س ب



٢٠) ا ب ه Δ فيه و \in ا ب بحيث $\angle (د ا ه و) = \angle (د ب ه و)$

اثبت أن : $\angle (د ا و ه) < \angle (د ب و ه)$



مسائل المتفوقين

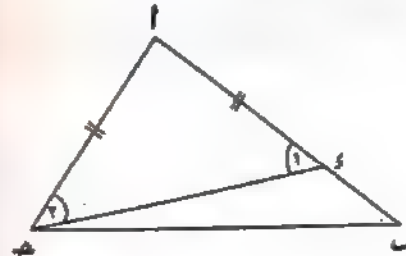
٢١) إذا كانت م نقطة داخل المثلث ا ب ه فاثبت أن : $\angle (د ا م ب) < \angle (د ب م ا)$



المقارنة بين زوايا المثلث

نظرية

إذا اختلف طول ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر



المعطيات ΔABC فيه $AB < AC$

المطلوب $\angle C < \angle B$

العمل نأخذ AD بحيث $AD = AB$

البرهان ΔABC فيه $AD = AB$

$$\therefore \angle C = \angle D \quad (1)$$

\therefore خارجة عن ΔABC

$$\therefore \angle C < \angle D \quad (2)$$

$$\therefore \angle C < \angle B$$

$$\therefore \angle C < \angle B$$

$$\therefore \angle C < \angle B$$

ملاحظات

في ΔABC إذا كان AB الضلع الأكبر فإن $\angle C$

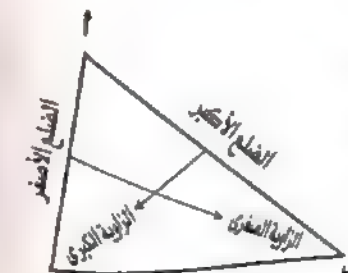
هي الزاوية الكبرى وهي الزاوية المقابلة لهذا الضلع

(لاحظ أن الضلع الأكبر حرفه A, B وتكون

الزاوية المقابلة هي الحرف الثالث للمثلث أي $\angle C$)

و إذا كان AC الضلع الأصغر تكون $\angle B$

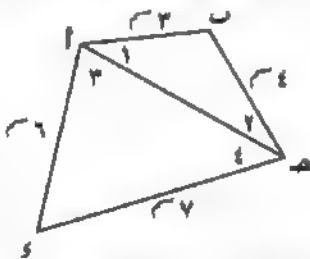
هي الزاوية الصغرى



- أكبر زوايا المثلث في القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً
- وأصغر زواياه في القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولاً
- نستخدم النظرية للمقارنة بين طول ضلعين في مثلث واحد

أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل:



أ ب هـ شكل رباعي فيه

$$\angle BAC = 30^\circ, \angle CAD = 40^\circ,$$

$$\angle ABC = 70^\circ, \angle ACD = 60^\circ,$$

أثبت أن:

$$\angle BAC < \angle CAD$$

الحل

$$\angle BAC = 30^\circ, \angle CAD = 40^\circ, \angle ABC = 70^\circ, \angle ACD = 60^\circ$$

$$\angle BAC < \angle CAD$$

$$\Delta ABC \text{ فيه } \angle BAC < \angle CAD$$

$$\therefore \angle BAC < \angle CAD \quad (1)$$

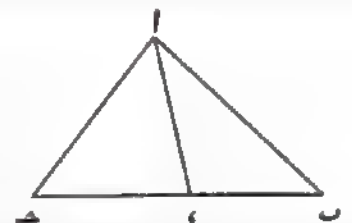
$$\text{في } \Delta ACD \text{ فيه } \angle CAD < \angle ACD$$

$$\therefore \angle CAD < \angle ACD \quad (2)$$

$$\text{من (1)، (2) بالجمع } \angle BAC < \angle CAD < \angle ACD$$

$$\therefore \angle BAC < \angle CAD$$

في الشكل المقابل:



في الشكل المقابل:

أ ب هـ فيه

$$\angle ABD < \angle ACD$$

أثبت أن:

$$\angle ABD < \angle ACD$$

الحل



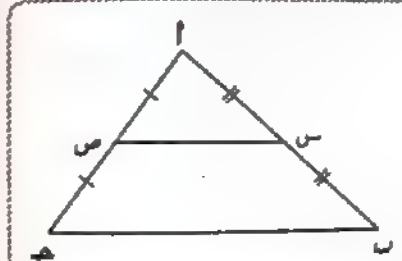
المعطيات
المطلوب
البرهان

المعطيات: $AB < AC$, $D \in BC$
المطلوب: $\angle ADB < \angle ADC$ (1)
البرهان: في $\triangle ABC$: $AB < AC$
 $\therefore \angle ACB < \angle ABC$
في $\triangle BDC$: $\angle BDC < \angle BCD$ (2)
من (1)، (2): $\angle ADB < \angle ADC$

#



مثال 3: في الشكل المقابل:
 $AB < AC$
 S منتصف AB
 M منتصف AC
أثبت أن:
 $\angle ASM < \angle CSM$



الحل

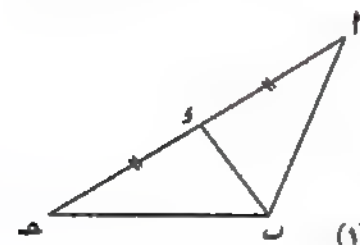
المعطيات: $AB < AC$, S منتصف AB , M منتصف AC
المطلوب: $\angle ASM < \angle CSM$
البرهان: في $\triangle ABC$: $AB < AC$
 $\therefore \angle ACB < \angle ABC$
 $\therefore \angle CSM < \angle ASM$ (1)
في $\triangle ASM$: $AS = CM$ (2)
في $\triangle CSM$: $CS = AS$ (3)
من (1)، (2)، (3): $\angle ASM < \angle CSM$

#



المعطيات: AB مثلث، D منتصف AC فإذا كان $\angle A < \angle C$
فأثبت أن: $\angle ADB < \angle ADC$

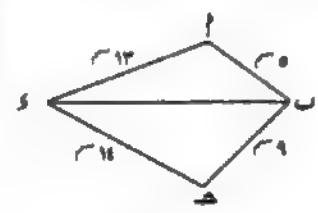
الحل



المعطيات: AB مثلث، D منتصف AC
المطلوب: $\angle ADB < \angle ADC$
البرهان: في $\triangle ABC$: $\angle A < \angle C$
 $\therefore \angle BAC < \angle BCA$
في $\triangle ABD$: $\angle ADB < \angle ABD$ (1)
في $\triangle CBD$: $\angle CBD < \angle BCD$ (2)
من (1)، (2): $\angle ADB < \angle ADC$

أشئلة لتدريب

تدريب (1)



في الشكل المقابل:
 AB هو شكل رباعي فيه $AB = 5$, $BC = 9$, $CD = 14$, $DA = 13$
أكمل ما يأتي لإثبات أن:
 $\angle ADB < \angle CDB$



المعطيات
المطلوب
البرهان

.....

.....

Δ : $AB \parallel CD$ و فيه $AD \perp AB$

(1) $\angle ADB < \angle BDC$ (.....)

Δ : $AB \parallel CD$ و فيه $AD \perp AB$

(2) $\angle ADB < \angle BDC$ (.....)

بجمع (1)، (2) ينتج أن:

$\angle ADB < \angle BDC$ (.....)

$\angle ADB < \angle BDC$ (.....)

#

تدريب (2)

في الشكل المقابل:

$AB \parallel CD$

$AD \cap BC = \{M\}$

$\angle M < 90^\circ$

أكمل ما يأتي لإثبات أن:

$\angle ADB < \angle BDC$ (.....)

المعطيات

المطلوب

البرهان

.....

.....

Δ : $AB \parallel CD$ ، $AD \perp AB$ ، $AD \perp CD$ قاطعتين لهما

(1) $\angle ADB = \angle BDC$ (.....) بالـ

(2) $\angle ADB = \angle BDC$ (.....) بالـ

(3) $\angle ADB < \angle BDC$ (.....)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن:

$\angle ADB < \angle BDC$ (.....)



على المقارنة بين زوايا المثلث

تمارين (7)

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

ساعة امتحان ومراجعة

10

(1) في الشكل المقابل أكمل ما يأتي:

$AB \parallel CD$ ، مستطيل ، M نقطة تقاطع قطريه ،

H منتصف BC ، $AD \cap BC = \{M\}$ ،

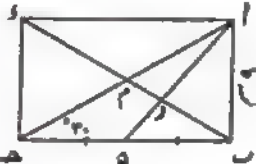
$\angle ADB = 30^\circ$ ، $\angle BDC = 90^\circ$ ، $\angle H = 12^\circ$ فإن:

(1) $\angle ADB = \dots\dots\dots$ ، $\angle BDC = \dots\dots\dots$

(2) $\angle ADB = \dots\dots\dots$ ، محيط $\Delta ADB = \dots\dots\dots$

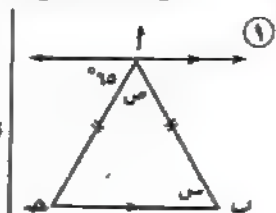
(3) $\angle ADB = \dots\dots\dots$ ، $\angle BDC = \dots\dots\dots$

(4) عند محاور تماثل $\Delta ADB = \dots\dots\dots$ بينما $\Delta BDC = \dots\dots\dots$ تماثل



برهان

(ب) في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة $\angle S$ ، $\angle V$:



$\angle S = \dots\dots\dots$ ، $\angle V = \dots\dots\dots$

$\angle S = \dots\dots\dots$ ، $\angle V = \dots\dots\dots$

$\angle S = \dots\dots\dots$ ، $\angle V = \dots\dots\dots$

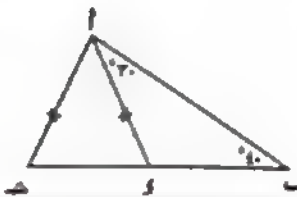
برهان

(ج) في الشكل المقابل :

$\angle ADB = 40^\circ$ ، $\angle BDC = 100^\circ$

$\angle ADB = 30^\circ$

اثبت أن $AB = BC$



برهان



ثانياً: أجب عما يأتي:

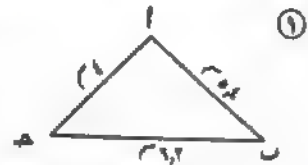
مسائل المستوى الأول

١) في كل من الأشكال التالية أكمل باستخدام $<$ ، $>$ ، $=$:

ن (١ د) ن (١ ب)

ن (١ د) ن (١ ب)

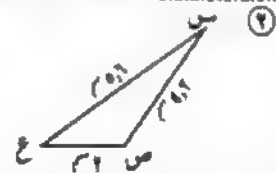
ن (١ د) ن (١ ب)



ن (١ د) ن (١ ب)

ن (١ د) ن (١ ب)

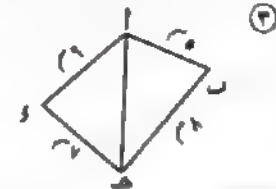
ن (١ د) ن (١ ب)



ن (١ د) ن (١ ب)

ن (١ د) ن (١ ب)

ن (١ د) ن (١ ب)



٢) رتب قياسات زوايا المثلث أ ب هـ في كل من الحالتين الآتيتين ترتيباً تصاعدياً:

١) إذا كان أ ب = ٧ سم ، ب هـ = ١٠ سم ، أ هـ = ٥ سم

٢) إذا كان أ ب = ٧ سم ، ب هـ = ١٠ سم ، أ هـ = ٥ سم

٣) أكمل ما يأتي:

١) إذا اختلف طولاً ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله

٢) أكبر زوايا المثلث في القياس تقابل طولاً وأصغر زوايا في القياس تقابل

٣) إذا كان س م = ٣ سم ، م ع = ٤ سم في Δ س م ع فإن ن (.....) < ن (.....)

٤) في أي مثلث إذا كان أ ب < أ هـ < ب هـ فإن ن (.....) < ن (.....) < ن (.....)

٥) إذا كان Δ أ ب هـ فقيم الزاوية في ب فإن < أ ب ، ن (.....) < ن (.....)

٥) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:

١) في Δ س م ع إذا كان س م ع < م ع فإن ن (د س) ن (د ص)

[.....]

٢) في Δ أ ب هـ إذا كان أ ب < أ هـ ، ن (د ب) = ٤٠° فإن ن (د هـ) = ٤٠°

[.....]

٣) إذا كان أ ب = ٣ سم ، ب هـ = ٤ سم ، أ هـ = ١ سم فإن

[.....]

ن (د هـ) < ن (د ب) ، ن (د ب) < ن (د ا) ، ن (د ا) < ن (د ب)

٤) إذا كان Δ س م ع منفرج الزاوية في س ، س د \perp م ع فإن

ن (د ص) ن (د م و س)

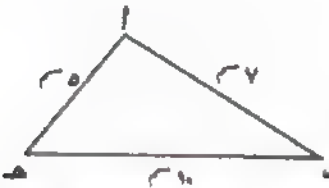
[.....]

مسائل المستوى الثاني

٦) في الشكل المقابل:

أ ب هـ Δ فيه أ ب = ٧ سم ،

أ هـ = ٥ سم ، ب هـ = ١٠ سم



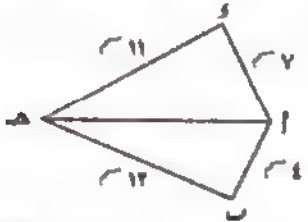
رتب قياسات زوايا المثلث ترتيباً تصاعدياً ثم تنازلياً

٧) في الشكل المقابل:

أ ب هـ د شكل رباعي فيه

أ ب = ٤ سم ، ب هـ = ١٢ سم ،

هـ د = ١١ سم ، د ا = ٧ سم



اثبت أن ، ن (د ا و) < ن (د ب و)

٨) في الشكل المقابل:

أ ب < أ هـ ،

د و \supseteq م ع ،



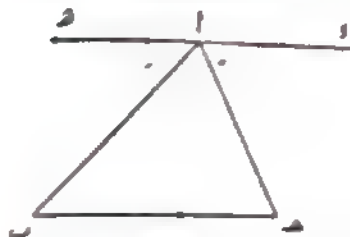
اثبت أن ، ن (د ا و) < ن (د ا هـ و)



٩ فو الشكل المقابل،
 ΔABC فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$
 أثبت أن:
 $\angle ADB < \angle ADC$



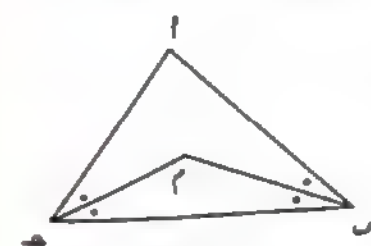
١٠ فو الشكل المقابل،
 ΔABC فيه $AB < AC$ ،
 $DE \parallel BC$ ويمر بنقطة A
 أثبت أن:
 $\angle ADE < \angle ADC$



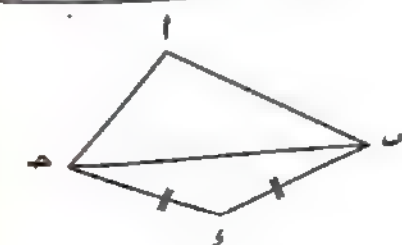
١١ فو الشكل المقابل،
 ΔABC فيه $AB < AC$ ،
 $DS \parallel AB$ ، $DS \parallel AC$
 أثبت أن:
 $\angle D < \angle S$



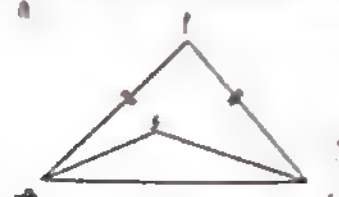
١٢ فو الشكل المقابل،
 ΔABC مثلث، M منتصف AB
 DM يمتد إلى D فبنا مكان B
 أثبت أن:
 $\angle D < \angle C$



١٣ فو الشكل المقابل،
 ΔABC شكل رباعي فيه
 $AB = AC$ ، $AD < AE$
 أثبت أن:
 $\angle ADE < \angle AED$



١٤ فو الشكل المقابل،
 ΔABC فيه $AB = AC$ ،
 نقطة داخل المثلث بحيث $AD < AE$
 أثبت أن:
 $\angle ADE < \angle AED$



١٥ ΔABC فيه $AB < AC$ ، $AD \perp BC$ بحيث $AD \cap BC = D$
 أثبت أن:
 $\angle ADB < \angle ADC$

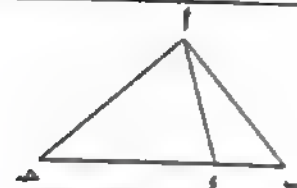
١٦ ΔABC فيه $AB < AC$ ، $AD \parallel BC$ بحيث $AD < AE$ ، $AD < AE$
 أثبت أن:
 $\angle ADE < \angle AED$

١٧ فو الشكل المقابل،
 ΔABC شكل رباعي فيه AB أكبر الأضلاع طولاً، AD أصغرهما طولاً
 أثبت أن:
 $\angle ADB < \angle ADC$

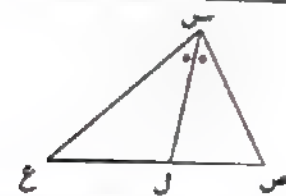


١٨ فو الشكل المقابل،
 M متوسط ΔABC
 $M > m$
 أثبت أن ΔABC متفرجة

١٩ ΔABC فيه AD ينصف BC ويقطع AM في D فبنا مكان B'
 أثبت أن ΔABC متفرجة



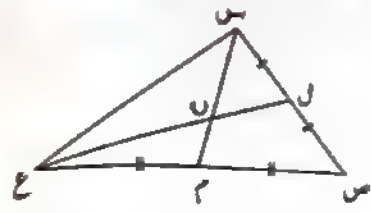
٢٠ فو الشكل المقابل،
 ΔABC فيه
 $AD < AE$ ، $AD < AE$
 أثبت أن:
 $\angle ADE < \angle AED$



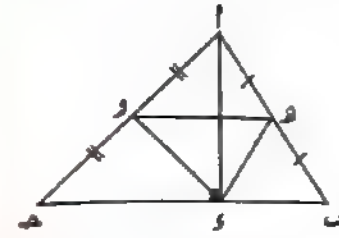
٢١ فو الشكل المقابل،
 ΔABC فيه $AB < AC$ ، $AD < AE$
 AD ينصف BC ويقطع AM في D
 أثبت أن: ΔABC من حادة



٢٢) في الشكل المقابل،
 \triangle من $ص$ ع \triangle فيه التوسطن $س$ م، ع ل
 متقاطعان في $ن$ ، $ن ل < ن م$
 أثبت أن،
 $ن (د ن س ع) < ن (د ن ع س)$

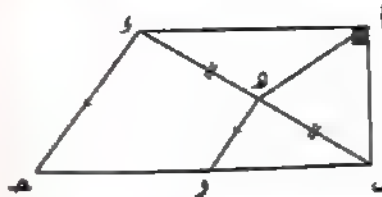


٢٣) في الشكل المقابل،
 \triangle ا ب ح فيه ا ح < ا ب ،
 $\overline{ا د} \perp \overline{ب ح}$ تقطعها في د ،
 د منتصف ا ب ، ومنتصف ا ح
 أثبت أن: $ن (د و ح) < ن (د و ه)$



٢٤) ا ب ح د مستطيل ، د و ع ا ب بحيث د ح < د ب
 أثبت أن: $ن (د و ح) < ن (د و ب)$

٢٥) في الشكل المقابل،
 ا ب ح د شكل رباعي فيه $\angle ا = 90^\circ$ ،
 د منتصف ب د ، $\overline{ق و} \parallel \overline{ا د}$
 ويقطع ب ح في ر ، ا د < د و
 أثبت أن: $ن (د ح) < ن (د و ح)$



مسائل المتفوقين

٢٦) ا ب ح د فيه ا د متوسط ف إذا كان $ا د = ٣$ ، $ب ح = ٤$
 فأثبت أن: د ح حادة

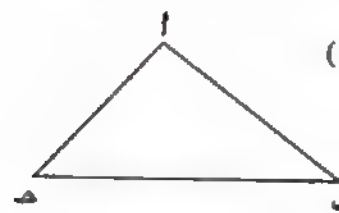
٢٧) ا ب ح د متوازي أضلاع فيه ا ح < ب د أثبت أن د ب متفرجة

٢٨) ا ب ح د شكل رباعي فيه $\overline{ا ب} \parallel \overline{ا د}$ ، $ن (د ح) < ن (ا د)$
 أثبت أن: $ن (د ا ب) < ن (د و ح)$

المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

نظرية

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس
 يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى



المعطيات \triangle ا ب ح فيه $ن (د ح) < ن (د ب)$
 المطلوب إثبات أن $ا ح < ا ب$
 البرهان $\therefore \overline{ا ب}$ ، $\overline{ا ح}$ قطع مستقيمة

∴ يجب أن نتحقق إحدى الحالات التالية:

- ١) $ا ب > ا ح$
- ٢) $ا ب = ا ح$
- ٣) $ا ب < ا ح$

إذا لم تكن $ا ب < ا ح$

فإما $ا ب = ا ح$ أو $ا ب > ا ح$

لأن كان $ا ب = ا ح$ فإن $ن (د ح) = ن (د ب)$

وهذا يخالف المعطيات حيث أن $ن (د ح) < ن (د ب)$

وإذا كان $ا ب > ا ح$ فإن $ن (د ح) > ن (د ب)$ حسب النظرية السابقة

وهذا يخالف المعطيات حيث أن $ن (د ح) < ن (د ب)$

∴ يجب أن يكون $ا ب < ا ح$

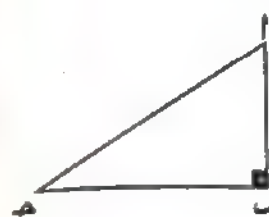
ملاحظة

تستخدم النظرية للمقارنة بين قياسى زاويتين في مثلث واحد



نتيجة

في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث



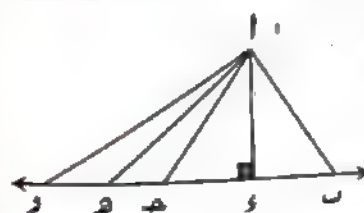
فمثلاً: في $\triangle ABC$ القائم الزاوية في C تكون زاوية B لها أكبر قياس لأنها قائمة، $\angle B$ حادتين أي أن $\angle B > \angle C$ و $\angle B > \angle A$ وبالتالي يكون أكبر ضلع هو AB وهو المقابل للزاوية القائمة أي أن $AB > BC$ ، $AB > AC$

ملاحظة

في المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث

نتيجة

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم



فمثلاً: إذا كانت A نقطة خارج المستقيم BC ورسمنا القطعة المستقيمة AD عمودية على BC ورسمنا قطع مستقيمة أخرى مثل AB ، AC ، AE ، AF

نلاحظ أن: $\triangle ABC$ وتكون AD وتر في هذا المثلث وبالمثل $AD > AB$ ، $AD > AC$ ، $AD > AE$ أي أن طول AD أصغر من طول أي قطعة أخرى مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم BC

تعريف

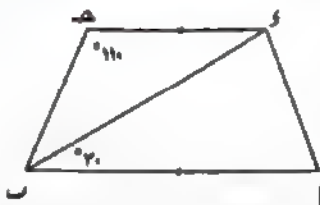
بعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم

فمثلاً: بعد النقطة A عن المستقيم BC في الشكل السابق هو طول AD



أمثلة توضيحية

في الشكل المقابل:



AB هو شكل رباعي فيه $AD \parallel BC$ ،
 $\angle DAC = 30^\circ$ و $\angle ACB = 110^\circ$
 أثبت أن: $AD < BC$

الحل

$AD \parallel BC$

$$\angle DAC = 30^\circ \text{ و } \angle ACB = 110^\circ$$

$$AD < BC$$

$$\therefore AD \parallel BC \text{ و } \angle DAC = 30^\circ \text{ و } \angle ACB = 110^\circ$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ \text{ و } \angle ACB = 110^\circ \text{ بالتبادل}$$

$$\therefore \text{مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

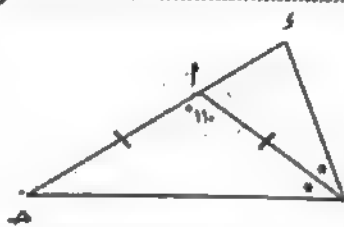
$$\therefore \angle DAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\therefore AD < BC$$

#

في الشكل المقابل:



$AD = AD$ و AD ينصف BC
 ويقطع BC في D و $\angle DAC = 110^\circ$
 أثبت أن: $AD < BC$

الحل

$$AD = AD \text{ و } AD \text{ ينصف } BC \text{ و } \angle DAC = 110^\circ$$

$$AD < BC$$



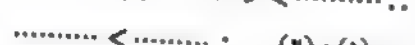
تدریب (۹)

$$v_0 = (afsb)u$$

$$\dots \prec \alpha \therefore (\dots \prec \alpha) \cup \beta \prec (\dots \prec \alpha) \cup \gamma;$$

تقریب (۲)

البرهان



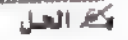
فرماندهی

فرمانده:

٥٥٤

$$a \leq b \quad a = b$$

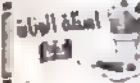

الطهارة، م م م م م



۷۴ < ۷۲

۱۰۰۰

$\omega_1 < \omega_2$.



ساعة امتحان ومراجعة

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١) أكمل ما يأتي:

الضلع
الزاوية
(٧)

- ١) منتصف زاوية الرأس في Δ متساوي الساقين يكون
- ٢) إذا كان قياس زاوية خارجة لمثلث متساوي الساقين يساوي 120° فإن المثلث
- ٣) محور تماثل القطعة المستقيمة هو
- ٤) في Δ ABC إذا كان $\angle A = 30^\circ$ ، $\angle B = 90^\circ$ فإن $AC = \dots\dots\dots$

درجات

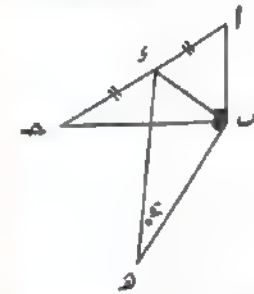
(ب) في الشكل المقابل:



- $AB = AC$ ، $\angle B = \angle C$ ، $\angle A = 60^\circ$ ،
 DE ينصف BC ،
 DE ينصف $\angle A$ ،
 اثبت أن: ١) $DE \parallel BC$ متساوي الساقين
 ٢) DE محور تماثل ABC

درجات

(ج) في الشكل المقابل:



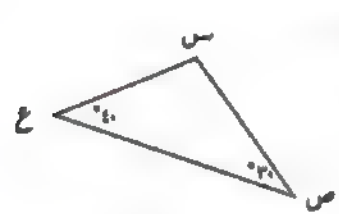
- $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle A = 30^\circ$ ،
 $DE \perp AC$ ، DE ينصف AB ،
 اثبت أن: $AD = DE$

درجات

ثانياً: اجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

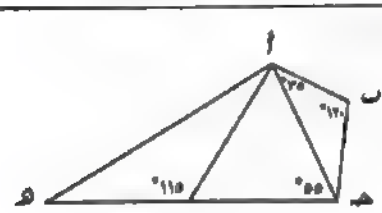
٢) في كل من الأشكال الآتية أكمل باستخدام $< >$:



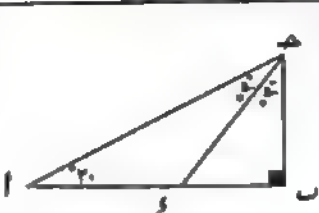
- س س
 ع س
 س ع



- أ ب
 ب أ
 أ ب



- س ع
 ع س
 س ع



- أ ب
 ب أ
 أ ب

٣) Δ ABC فيه $\angle A = 40^\circ$ ، $\angle B = 80^\circ$ ، $\angle C = 120^\circ$
 رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً

٤) ABC مثلث فيه $\angle A = 45^\circ$ ، $\angle B = 75^\circ$ ، $\angle C = 120^\circ$
 رتب أطوال أضلاع المثلث ABC تنازلياً



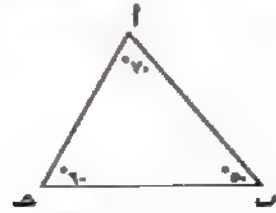
٥) اخط ما ياتو:

- ١) في Δ ا ب ح إذا كان \angle (ا ب ح) = 70° ، \angle (ا ح ب) = 70° فإن ا ب <
- ٢) في Δ القائم الزاوية أكبر الأضلاع طولاً هو
- ٣) إذا كان Δ ا ب ح منفرج الزاوية في ا فإن أكبر أضلاعه طولاً هو
- ٤) إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس
- ٥) إذا كان Δ س م ع فيه س م = ٧ سم، م ع = ٦ سم، س ع = ٥ سم فإن أصغر زوايا Δ الداخلية في القياس هي
- ٦) الضرب بين المستقيم وأي نقطة خارجه هو
- ٧) في Δ ا ب ح إذا كان \angle (ا ب ح) < \angle (ا ح ب) فإن <
- ٨) أصغر زوايا المثلث قياساً يقابلها
- ٩) في Δ ا ب ح إذا كان \angle (ا ب ح) = 100° فإن أكبر الأضلاع طولاً هو

٦) اذكر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس:

- ١) في Δ ا ب ح إذا كان \angle (ا ب ح) = 90° فإن ا ب ا ح
- ٢) في Δ ا ب ح إذا كان ا ب = ا ح، \angle (ا ب ح) = 80° فإن
[ا ب < ا ح ، ا ب = ا ح ، ا ب > ا ح]
- ٣) الوتر في المثلث القائم الزاوية أضلاعه طولاً
[أكبر ك أصغر ك يساوي أحد ك أكبر من أيسوى أحد]
- ٤) في Δ س م ع إذا كان \angle (ا ب ح) < \angle (ا ب ح) فإن س م ع
[< ك > ك = ك \equiv ك]
- ٥) في Δ ا ب ح إذا كان ا ب = ا ح، \angle (ا ب ح) = 40° فإن ب ح ا ح
[< ك > ك = ك \equiv ك]
- ٦) إذا كان ا ب ح Δ فيه \angle (ا ب ح) = 60° ، \angle (ا ح ب) = 40° فإن أصغر الأضلاع طولاً هو
[ا ب ك ب ح ك ح ا ك غير ذلك]
- ٧) في Δ ا ب ح إذا كان \angle (ا ب ح) = \angle (ا ح ب) + \angle (ا ب ح) فإن أكبر الأضلاع طولاً
[ا ب ك ب ح ك ح ا ك غير ذلك]

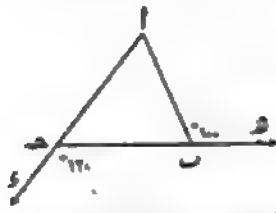
٧) فو الشكل المقابل:



- ١) \angle (ا ب ح) = 70°
- ٢) \angle (ا ب ح) = 50°
- ٣) \angle (ا ب ح) = 60°

رتب أضلاع المثلث تصاعدياً وتنازلياً حسب أطوالهم

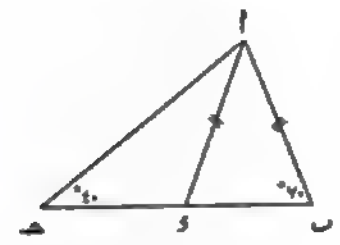
٨) فو الشكل المقابل:



- ١) ا ب ح Δ ، ا ب ح Δ ، ا ب ح Δ
- ٢) \angle (ا ب ح) = 130° ، \angle (ا ب ح) = 120°
- ٣) أثبت أن ا ب ح < ا ح

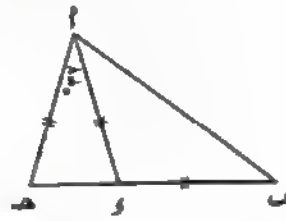
مسائل المستوى الثاني

٩) فو الشكل المقابل:



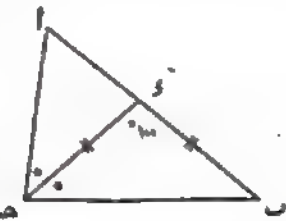
- ١) ا ب ح Δ فيه
- ٢) \angle (ا ب ح) = 70° ، \angle (ا ب ح) = 40°
- ٣) ا ب ح بحيث ا ب = ا ح
- ٤) أثبت أن ا ب ح < ا ح

١٠) فو الشكل المقابل:



- ١) ا ب ح Δ ، ا ب ح Δ
- ٢) بحيث ا ب = ا ح = ب ح
- ٣) \angle (ا ب ح) = 32°
- ٤) أثبت أن ا ب ح < ا ح

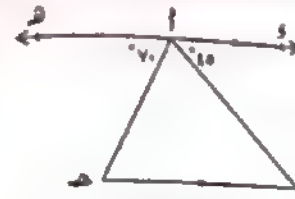
١١) فو الشكل المقابل:



- ١) ا ب ح مثلث، ح د ينصف ا ح
- ٢) ويقطع ا ب في و، و ب = و ح
- ٣) \angle (ا ب ح) = 100°
- ٤) أثبت أن ا ب ح < و ب



١٢) فوالشكل المقابل:



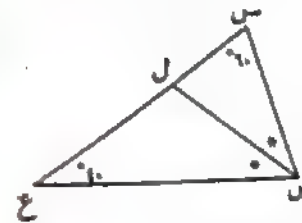
أ ب هـ د ، $\overline{دق} \parallel \overline{دق}$ ،
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ، $\angle ٥ = \angle ٦$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ > \angle ٢$

١٣) فوالشكل المقابل:



أ ب هـ د شكل رباعي فيه
 $\overline{دق} \parallel \overline{دق}$ ، $\overline{دق} \parallel \overline{دق}$ ،
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

١٤) فوالشكل المقابل:



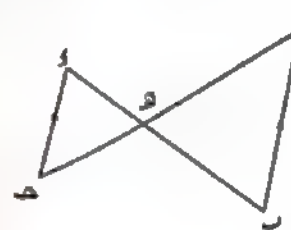
س م ع د فيه $\angle ١ = \angle ٢$ ،
 $\angle ٣ = \angle ٤$ ، $\angle ٥ = \angle ٦$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

١٥) فوالشكل المقابل:



أ ب هـ د شكل رباعي فيه
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 $\angle ٥ = \angle ٦$ ، $\angle ٧ = \angle ٨$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

١٦) فوالشكل المقابل:



أ ب د هـ ، $\overline{دق} \parallel \overline{دق}$ ،
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$



١٧) فوالشكل المقابل:



أ ب د هـ ، $\angle ١ = \angle ٢$ ،
 $\angle ٣ = \angle ٤$ ، $\angle ٥ = \angle ٦$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

١٨) فوالشكل المقابل:

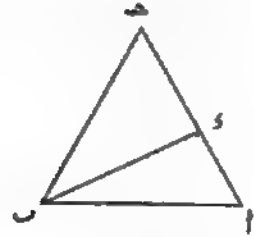


أ ب هـ د شكل
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

١٩) فوالشكل المقابل:

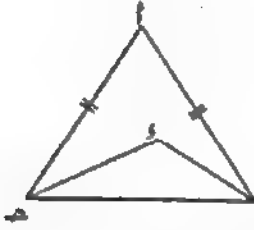
أ ب هـ د شكل قائم الزاوية في ب ، $\angle ١ = \angle ٢$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

٢٠) فوالشكل المقابل:



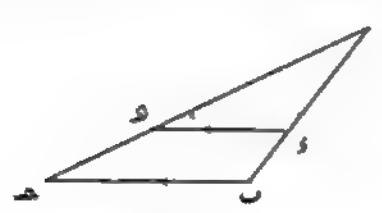
أ ب هـ د فيه
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

٢١) فوالشكل المقابل:



أ ب هـ د شكل فيه
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

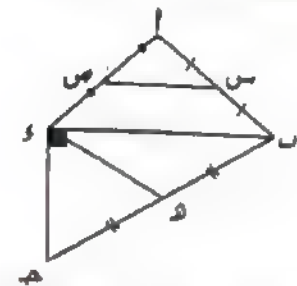
٢٢) فوالشكل المقابل:



أ ب هـ د شكل
 منفرج الزاوية في ب ،
 $\angle ١ = \angle ٢$ ، $\angle ٣ = \angle ٤$ ،
 أثبت أن : $\angle ١ < \angle ٢$

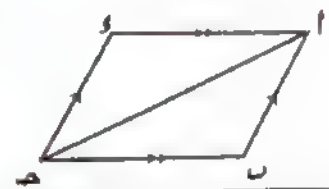


٢٣ ا ب هـ مثلث ، هـ منتصف د هـ ، $\overline{هـ د} \cap \overline{أ ب} = \{ و \}$
 اثبت أن $ب هـ < ب و$



٢٤ فو الشكل المقابل ،
 ا ب هـ د شكل رباعي فيه
 س ، ص ، هـ منتصفات
 $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ و}$ ، $\overline{ب هـ}$ على الترتيب
 و $(د ب و هـ) = 90^\circ$
 اثبت أن ، $و هـ < س س$

٢٥ ا ب هـ مثلث فيه $أ ب = أ هـ$ ، س $\in \overline{أ هـ}$ رسم س س يقطع $\overline{أ ب}$ في ص
 ويقطع $\overline{هـ ب}$ في ع اثبت أن ، $أ س < أ ب$



٢٦ فو الشكل المقابل ،
 ا ب هـ د متوازي أضلاع فيه
 و $(د و هـ أ) < (د أ هـ ب)$
 اثبت أن ، $أ و < أ ب$

مسائل المتفوقين



٢٧ فو الشكل المقابل ،
 د منتصف $\overline{أ ب}$ ، و $(د ب) = 70^\circ$ ،
 و $(د و هـ ب) = 50^\circ$
 اثبت أن ١ و $(د ب) < (د أ هـ و)$
 ٢ $أ ب د هـ$ حادة

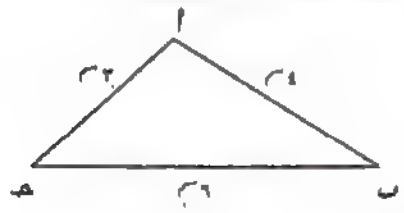
٢٨ ا ب هـ د في \triangle فيه $و (د ب) = ١ - س$ ، $٢ - س = ٣$ ، $٢ - س = ٤$ ،
 و $(د ب) = ٥ + س$ حيث جميع القياسات بالدرجات فأثبت أن ، $أ هـ < ب هـ$

٢٩ ا ب هـ د قائم الزاوية في ب ، و $\in \overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{أ هـ}$ ، د منتصف $\overline{و هـ}$
 اثبت أن ، ١ $ب هـ < ب و$ ٢ $ب و < و هـ$

متباينة المثلث

حقيقة

في أي مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث



ففي \triangle ا ب هـ يكون :
 $أ ب < أ هـ + ب هـ$
 $أ هـ < أ ب + ب هـ$
 $ب هـ < أ ب + أ هـ$
 $أ هـ - ب هـ < أ ب$

أى أن $أ ب < أ هـ + ب هـ < أ هـ - ب هـ$

١ أو من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث
 ٤٤٧٤٢ ١ ٣٤٨٤٥ ٢ ٨٤٦٤٣ ٣ ٥٤٥٤٥ ٤

بكم الحل

لعرفة الأعداد التى تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث نجمع طولى أصغر ضلعين وإذا كان مجموعهما أكبر من طول الضلع الثالث فإن الأعداد تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث وإذا كانت أصغر من أو تساوى طول الضلع الثالث ففى هذه الحالة لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

- | | |
|--|---------|
| لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث (لأن $٧ > ٤ + ٢$) | ٤٤٧٤٢ ١ |
| لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث (لأن $٨ = ٣ + ٥$) | ٣٤٨٤٥ ٢ |
| تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث | ٨٤٦٤٣ ٣ |
| تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع | ٥٤٥٤٥ ٤ |



ثانياً : اجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ اكمل ما يأتي :

- ١ في أي مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين
- ٢ في Δ ا ب ح. يكون ا ب + ح هـ ا هـ
- ٣ إذا كان ٤ سم ٩ سم طولاً ضلعين في مثلث فإن أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث =
- ٤ إذا كان ٥ سم ٨ سم طولاً ضلعين في مثلث فإن أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث =
- ٥ إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين هما ١٠ سم ٥ سم فإن طول الضلع الثالث =
- ٦ إذا كان طولاً ضلعين في مثلث ٧ سم ٤ سم فإن الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث هي

٣ اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

- ١ الأعداد ٥، ٥، ٥ تصلح أن تكون أطوالاً أضلاع مثلث [متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متساوي الأضلاع ، لا تصلح أضلاع مثلث]
- ٢ الأعداد ٥، ٥، ١٥ تصلح أن تكون أطوالاً أضلاع مثلث [متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متساوي الأضلاع ، لا تصلح أضلاع مثلث]
- ٣ طول أى ضلع في مثلث مجموع طولى الضلعين الآخرين [$<$ ، $>$ ، $=$ ، ضعف]
- ٤ مثلث به ضلعان طولهما ٧ سم ٥ سم يمكن أن يكون طول الضلع الثالث [١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤]
- ٥ في أي مثلث ا ب ح نجد أن ا ب ب ح - ح ا [$<$ ، $>$ ، $=$ ، \leq]
- ٦ الأطوال ٢ سم ، ٢ سم + ٦ سم تصلح أن تكون أطوالاً أضلاع مثلث إذا كانت س = [صفر ، ١ ، ٢ ، ٤]
- ٧ مثلث له محور تماثل واحد وطولاً ضلعين فيه ٣ سم ٦ سم فإن محيطه = [٣ ، ٩ ، ١٥ ، ١٢]



٤ او من هذه الأعداد تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث مع ذكر السبب ؟

- | | | |
|---------|---------|---------|
| ١ ٥٤٤٢ | ٢ ٧٤٥٣ | ٣ ٤٤٨٣ |
| ٤ ٦٤٦٦ | ٥ ١٣٤٧٦ | ٦ ١١٤٦٤ |
| ٧ ٦٤٣١٢ | ٨ ٧٤١٤٧ | ٩ ٥٤٩٤٥ |

٥ أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية

إذا كان طولاً الضلعين الآخرين هما :

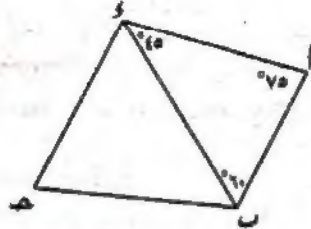
- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| ١ ٩٤ سم ٦ سم | ٢ ١٢٤ سم ٥ سم | ٣ ٦٤ سم ٥ سم |
| ٤ ١٠ سم ٢ سم | ٥ ٢٩ سم ٢٤ سم | ٦ ٤٤ سم ٤ سم |

٦ إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متساوي الساقين ٥ سم ١٢ سم

فما هو طول الضلع الثالث ؟ اذكر السبب

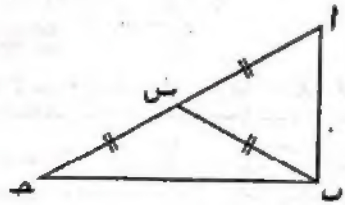
مسائل المستوى الثاني

٧ فو الشكل المقابل :



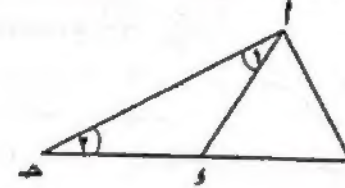
- ا ب ح د شكل رباعي فيه
- ١ $\angle BAC = 40^\circ$
- ٢ $\angle CAD = 70^\circ$
- ٣ $\angle BAC = 40^\circ$
- اثبت أن : $AB + AD < AC$

٨ فو الشكل المقابل :



- ا ب ح د فيه
- س منتصف ا ب
- س منتصف ا ح
- اثبت أن : $AB < AC$

٩ فو الشكل المقابل :



- ا ب ح د فيه $AB \geq AC$
- بحيث $\angle B = 2\angle C$
- اثبت أن : $AB < AC$



اختبارات (٤)

اختبارات مراجعة على ما سبق

نموذج (١)

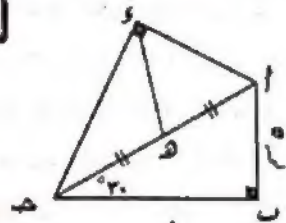
٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

أكمل ما يأتي:

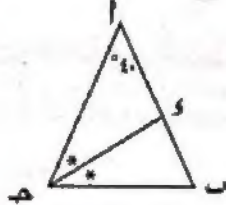
- ١ إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله
- ٢ محاور تماثل المثلث التساوي الساقين هو المستقيم
- ٣ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة 50° فإن قياس زاوية الرأس =
- ٤ أ ب هـ Δ فيه $\angle (أ ب) = 70^\circ$ ، $\angle (أ هـ) = 55^\circ$ فإن عدد محاور التماثل له =

(١) في الشكل المقابل:



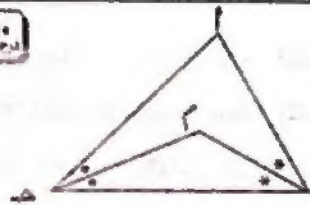
أ ب هـ Δ شكل رباعي فيه
 $\angle (أ ب) = \angle (أ هـ) = 90^\circ$
 $\angle (أ هـ) = 30^\circ$ ، $\angle (أ ب) = 30^\circ$
 هـ منتصف أ ب أوجد طول هـ

(ب) في الشكل المقابل:



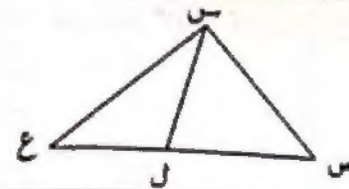
أ ب هـ Δ فيه $\angle (أ ب) = \angle (أ هـ)$
 هـ ينصف أ ب
 أوجد $\angle (أ هـ)$

(٢) في الشكل المقابل:



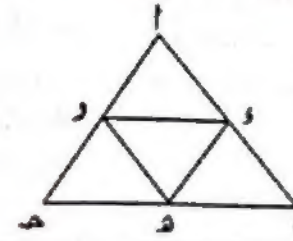
أ ب هـ مثلث، هـ منتصف أ ب
 هـ منتصف أ ب، $\angle (أ هـ) < \angle (أ ب)$
 أثبت أن: $\angle (أ ب) < \angle (أ هـ)$

١٠ في الشكل المقابل:



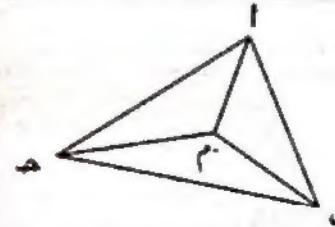
أ ب هـ Δ ، $\angle (أ ب) = \angle (أ هـ)$
 أثبت أن:
 محيط Δ أ ب هـ $< 2 \times$ أ ب

١١ في الشكل المقابل:



أ ب هـ Δ فيه $\angle (أ ب) = \angle (أ هـ)$
 $\angle (أ هـ) = 30^\circ$ ، $\angle (أ ب) = 30^\circ$
 أثبت أن:
 محيط Δ أ ب هـ $<$ محيط Δ هـ د ر

١٢ في الشكل المقابل:

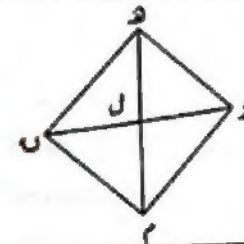


أ ب هـ مثلث، م نقطة داخلية
 أثبت أن:

$$\angle (أ ب) + \angle (أ هـ) + \angle (أ د) < \frac{1}{2} \text{ محيط المثلث أ ب هـ}$$

١٣ برهن أن طول أي ضلع في المثلث أصغر من نصف محيط المثلث

١٤ في الشكل المقابل:



هـ و م Δ شكل رباعي فيه
 $\{ \angle (أ ب) \} = \{ \angle (أ هـ) \}$
 أثبت أن:

$$\angle (أ ب) + \angle (أ هـ) < \text{محيط الشكل هـ و م}$$

١٥ أ ب هـ Δ ، رسم أ د يقطع هـ في د أثبت أن: $\angle (أ ب) + \angle (أ هـ) < \angle (أ د) + \angle (أ هـ)$



مسائل المتفوقين

١٦ إذا كان أ ب هـ مثلث حاد الزوايا فاثبت أن: $\angle (أ ب) < \angle (أ هـ)$

١٧ أثبت أنه في أي شكل رباعي يكون محيطه $<$ مجموع طولي قطريه



نموذج (٢)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق



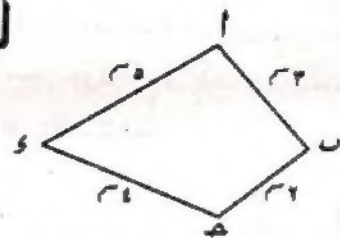
درجات

١ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

- ١ إذا كان قياس إحدى زوايا Δ قائم الزاوية 45° كان المثلث
 [متساوي الأضلاع ، متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متطابق الزوايا]
 ٢ إذا كان Δ AB له محور تماثل واحد فيه $\angle A = 120^\circ$ فإن $\angle B = \dots\dots\dots$
 [30° ، 40° ، 60° ، 120°]

درجات

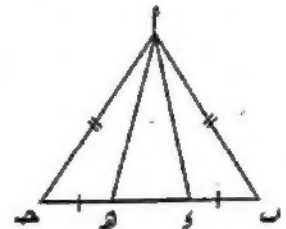
٢ في الشكل المقابل :



$AB = 3$ ، $BC = 2$ ، $CD = 5$ ، $DA = 4$
 أثبت أن $\angle A < \angle C$ و $\angle B < \angle D$

درجات

٣ في الشكل المقابل :



AB مثلث فيه $AB = AC$
 D على AB ، E على AC
 بحيث $DE \parallel BC$
 أثبت أن $AD = AE$

نموذج (٣)

٣٠

اختبار مراجعة على ما سبق

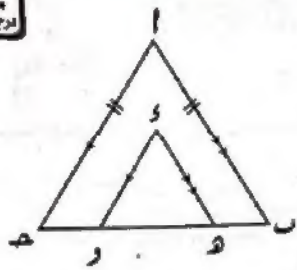


درجات

١ أكمل ما يأتي :

- ١ طول متوسط Δ الخارج من رأس القائمة يساوي
 ٢ منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين
 ٣ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها من جهة القاعدة بنسبة
 ٤ مجموع طولى أى ضلعين في مثلث طول الضلع الثالث

٢ (١) في الشكل المقابل :

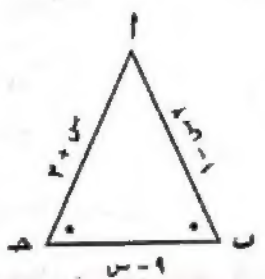


$AB = AC$ ،
 $DE \parallel BC$ ،
 $DE \parallel AC$

أثبت أن $\angle D = \angle E$ و $\angle B = \angle C$

٢ $\angle D = \angle E$ و $\angle B = \angle C$

(ب) في الشكل المقابل :

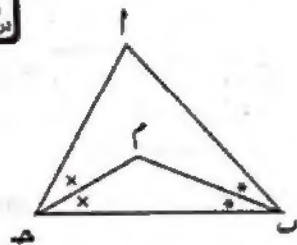


AB مثلث فيه
 $\angle B = 90^\circ$ ، $\angle C = 30^\circ$
 D على AB ، E على AC
 $DE \parallel BC$

أوجد محيط ΔABC علماً بأن :

$AD = 2$ ، $DE = 1$ ، $BC = 9$
 $AB = 2(2 - 1) = 2$ ،
 $AC = 9 - 2 = 7$ ،
 $BC = 9$

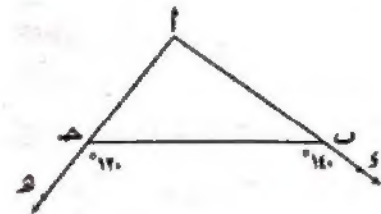
٣ (١) في الشكل المقابل :



AB مثلث ،
 M ينصف BC ،
 N ينصف AC ،
 P ينصف AB ،
 فإذا كان $AB < AC$

برهن أن $\angle P < \angle M$ و $\angle N < \angle M$

(ب) في الشكل المقابل :



AB مثلث ،
 $\angle B = 140^\circ$ ، $\angle C = 120^\circ$
 D على AB ، E على AC
 $DE \parallel BC$
 برهن أن $AB < AC$